

**Линейные системы. Собственные векторы и  
собственные значения. PageRank.**

**Даня Меркулов**

МФТИ. AI360

# Линейные системы

# Матричные разложения и линейные системы

В задаче наименьших квадратов (aka линейной регрессии) мы имеем измерения  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $y \in \mathbb{R}^m$  и ищем вектор  $\theta \in \mathbb{R}^n$  такой, что  $X\theta$  близок к  $y$ . Близость определяется как сумма квадратов разностей:

$$\sum_{i=1}^m (x_i^\top \theta - y_i)^2 \quad \|X\theta - y\|_2^2 \rightarrow \min_{\theta \in \mathbb{R}^n} \quad X\theta^* = y$$

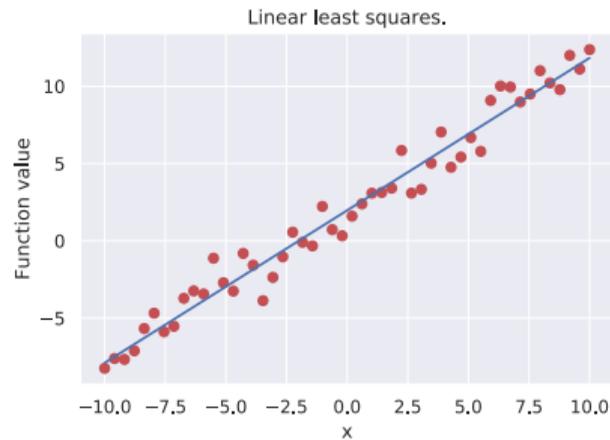
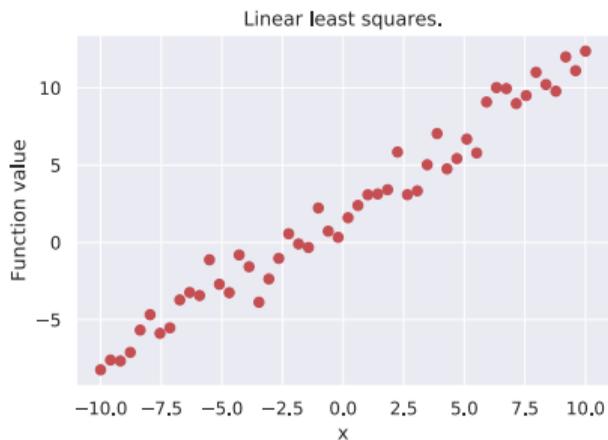


Рис. 1: Illustration of linear system aka least squares

# Матричные разложения и линейные системы

## Moore--Penrose inverse

Если матрица  $X$  относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^T X)^{-1} X^T y = X^\dagger y,$$

# Матричные разложения и линейные системы

## Moore--Penrose inverse

Если матрица  $X$  относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^T X)^{-1} X^T y = X^\dagger y,$$

где  $X^\dagger$  называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

# Матричные разложения и линейные системы

## Moore--Penrose inverse

Если матрица  $X$  относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^T X)^{-1} X^T y = X^\dagger y,$$

где  $X^\dagger$  называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

## QR разложение

Для любой матрицы  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

# Матричные разложения и линейные системы

## Moore--Penrose inverse

Если матрица  $X$  относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^T X)^{-1} X^T y = X^\dagger y,$$

где  $X^\dagger$  называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

## QR разложение

Для любой матрицы  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

где  $Q$  - ортогональная матрица (ее столбцы ортогональные единичные векторы) и  $R$  - верхняя треугольная матрица. Важно отметить, что поскольку  $Q^{-1} = Q^T$ , мы имеем:

$$QR\theta = y \quad \longrightarrow \quad R\theta = Q^T y$$

Теперь процесс нахождения  $\theta$  состоит из двух шагов:

1. Найдите QR разложение  $X$ .

# Матричные разложения и линейные системы

## Moore--Penrose inverse

Если матрица  $X$  относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^T X)^{-1} X^T y = X^\dagger y,$$

где  $X^\dagger$  называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

## QR разложение

Для любой матрицы  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

где  $Q$  - ортогональная матрица (ее столбцы ортогональные единичные векторы) и  $R$  - верхняя треугольная матрица. Важно отметить, что поскольку  $Q^{-1} = Q^T$ , мы имеем:

$$QR\theta = y \quad \longrightarrow \quad R\theta = Q^T y$$

Теперь процесс нахождения  $\theta$  состоит из двух шагов:

1. Найдите QR разложение  $X$ .
2. Решите треугольную систему  $R\theta = Q^T y$ , которая треугольная и, следовательно, легко решаемая.

# Матричные разложения и линейные системы

## Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  существует разложение Холецкого:

$$X^T X = A = L^T \cdot L,$$

где  $L$  - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^T L \theta = y \quad \longrightarrow \quad L^T z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения  $\theta$  состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого  $X^T X$ .

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

# Матричные разложения и линейные системы

## Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  существует разложение Холецкого:

$$X^T X = A = L^T \cdot L,$$

где  $L$  - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^T L \theta = y \quad \longrightarrow \quad L^T z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения  $\theta$  состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого  $X^T X$ .
2. Найдите  $z_\theta = L \theta$  путем решения треугольной системы  $L^T z_\theta = y$

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

# Матричные разложения и линейные системы

## Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  существует разложение Холецкого:

$$X^T X = A = L^T \cdot L,$$

где  $L$  - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^T L \theta = y \quad \longrightarrow \quad L^T z_\theta = y$$

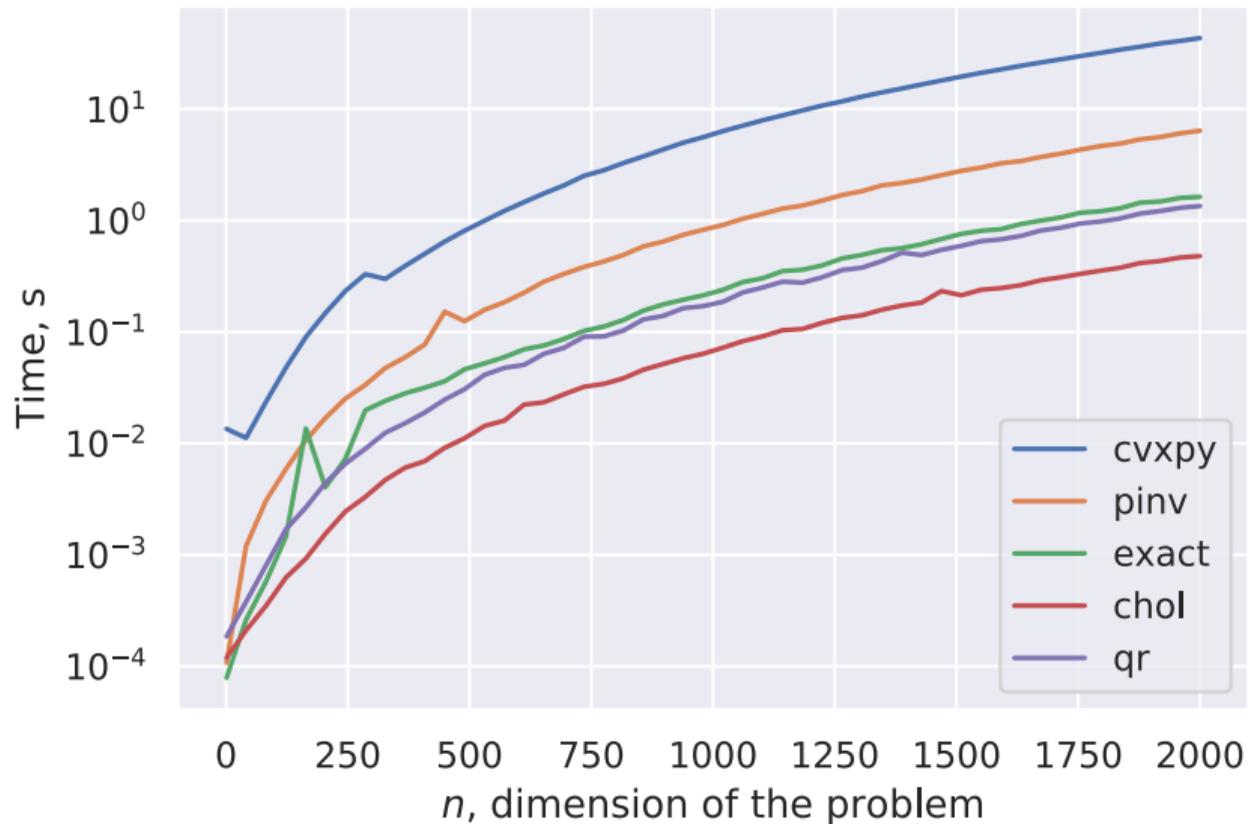
Теперь процесс нахождения  $\theta$  состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого  $X^T X$ .
2. Найдите  $z_\theta = L \theta$  путем решения треугольной системы  $L^T z_\theta = y$
3. Найдите  $\theta$  путем решения треугольной системы  $L \theta = z_\theta$

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

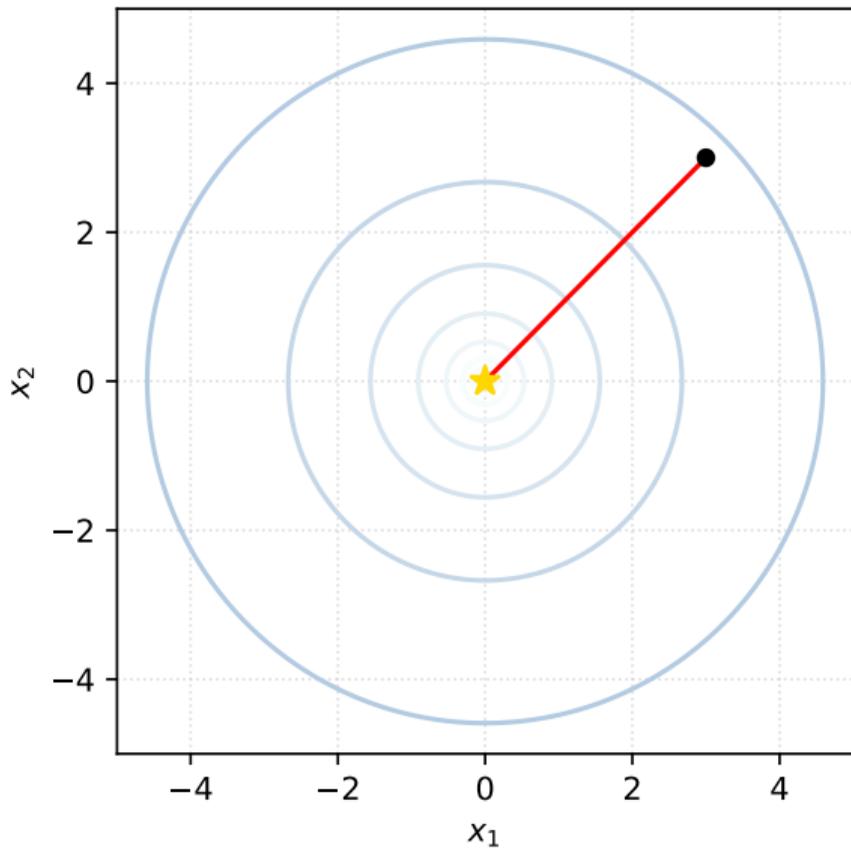
# Матричные разложения и линейные системы

Random square linear system

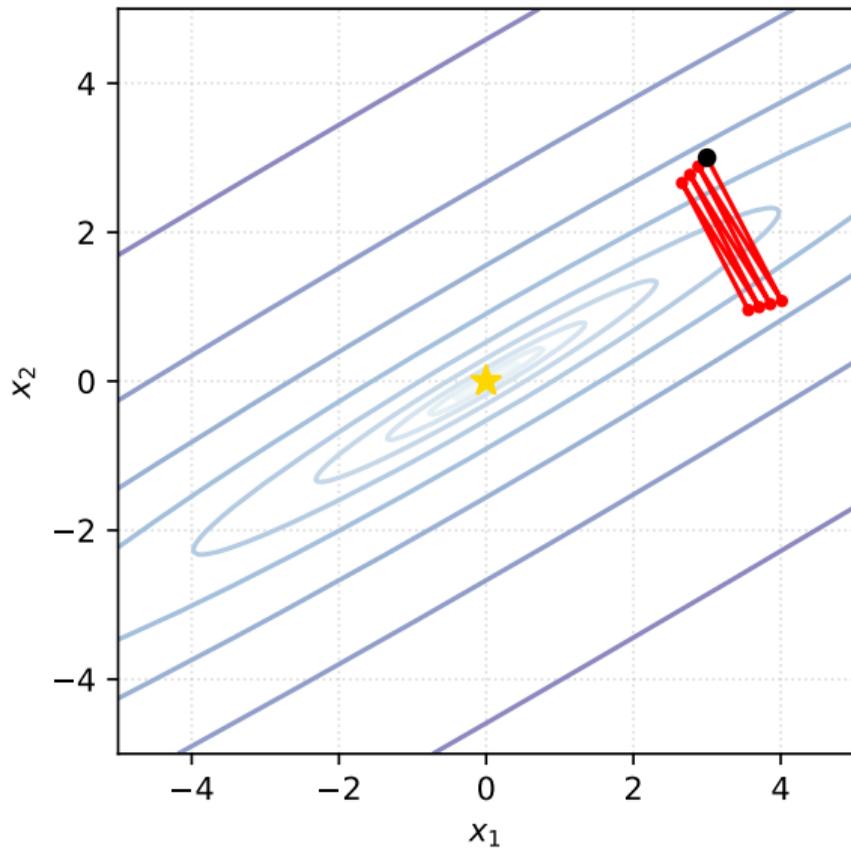


# Число обусловленности $\kappa$

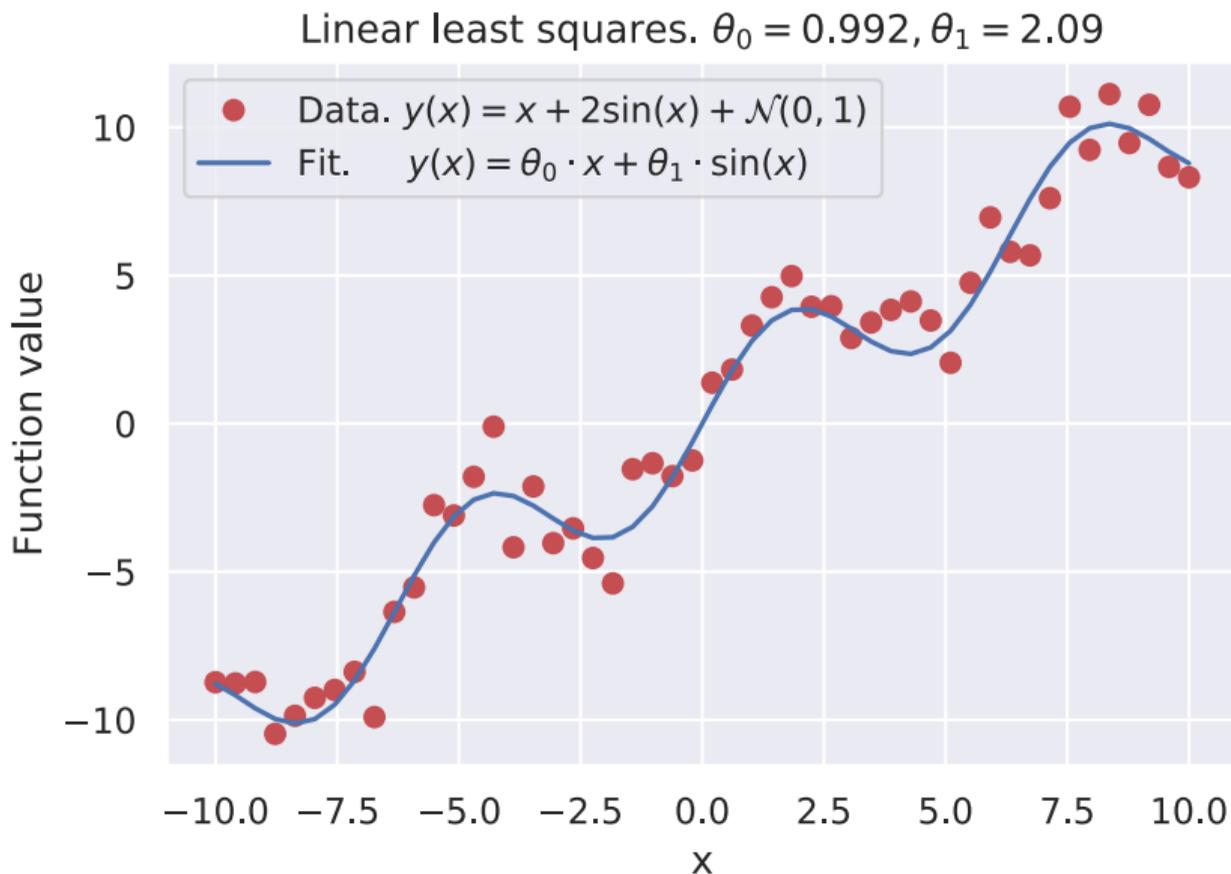
$\kappa = 1.0$



$\kappa = 100.0$



## Матричные разложения и линейные системы



## Собственные векторы и собственные значения

## Что такое собственный вектор?

- **Определение.** Вектор  $x \neq 0$  называется **собственным вектором** квадратной матрицы  $A$ , если существует число  $\lambda$  такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

## Что такое собственный вектор?

- **Определение.** Вектор  $x \neq 0$  называется **собственным вектором** квадратной матрицы  $A$ , если существует число  $\lambda$  такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

- Число  $\lambda$  называется **собственным значением**. Иногда используется термин **собственная пара**.

## Что такое собственный вектор?

- **Определение.** Вектор  $x \neq 0$  называется **собственным вектором** квадратной матрицы  $A$ , если существует число  $\lambda$  такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

- Число  $\lambda$  называется **собственным значением**. Иногда используется термин **собственная пара**.
- Поскольку  $A - \lambda I$  должна иметь нетривиальное ядро, собственные значения являются корнями характеристического полинома

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

## Спектральное разложение

Если матрица  $A$  размера  $n \times n$  имеет  $n$  собственных векторов  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$As_i = \lambda_i s_i,$$

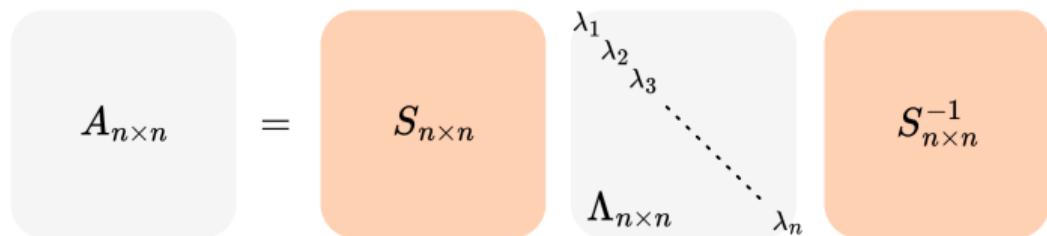
то это можно записать как

$$AS = S\Lambda, \quad \text{где } S = (s_1, \dots, s_n), \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

или эквивалентно

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Это называется **спектральным разложением** матрицы. Матрицы, которые могут быть представлены в виде спектрального разложения, называются **диагонализируемыми**.



# Вычисление собственных значений и собственных векторов

Как вычислить собственные значения и собственные векторы?

Существуют два типа задач на собственные значения:

- вычисление всех собственных значений и собственных векторов или полного спектра (требуется все собственные значения и собственные векторы)

# Вычисление собственных значений и собственных векторов

Как вычислить собственные значения и собственные векторы?

Существуют два типа задач на собственные значения:

- вычисление всех собственных значений и собственных векторов или полного спектра (требуются все собственные значения и собственные векторы)
- вычисление части спектра (минимальные/максимальные собственные значения, собственные значения в заданной области)

## Вычисление собственных значений через характеристическое уравнение

Задача на собственные значения имеет вид

$$Ax = \lambda x,$$

или

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

следовательно, матрица  $A - \lambda I$  имеет нетривиальное ядро и должна быть сингулярной.

Это означает, что определитель

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

- Уравнение называется **характеристическим уравнением**, а левая часть является полиномом степени  $n$ .

## Вычисление собственных значений через характеристическое уравнение

Задача на собственные значения имеет вид

$$Ax = \lambda x,$$

или

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

следовательно, матрица  $A - \lambda I$  имеет нетривиальное ядро и должна быть сингулярной.

Это означает, что определитель

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

- Уравнение называется **характеристическим уравнением**, а левая часть является полиномом степени  $n$ .
- Полином  $n$ -й степени имеет  $n$  комплексных корней!

# Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.

## Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

# Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома

## Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома
2. Вычислите корни

## Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома
2. Вычислите корни

# Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома
2. Вычислите корни

**Это хорошая идея?**

# Степенной метод

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.

## Степенной метод

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.
- Также интересно отметить, что для эрмитовых матриц ( $A = A^*$ ) собственные значения всегда действительные (докажите это!).

## Степенной метод

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.
- Также интересно отметить, что для эрмитовых матриц ( $A = A^*$ ) собственные значения всегда действительные (докажите это!).
- Степенной метод является самым простым методом для вычисления **наибольшего по модулю собственного значения**.

## Степенной метод

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.
- Также интересно отметить, что для эрмитовых матриц ( $A = A^*$ ) собственные значения всегда действительные (докажите это!).
- Степенной метод является самым простым методом для вычисления **наибольшего по модулю собственного значения**.
- Он также является нашим первым примером **итерационного метода** и **метода Крылова**.

## Упражнение

Докажите, что для эрмитовых матриц ( $A = A^*$ ) собственные значения всегда действительные.

## Упражнение

Докажите, что для эрмитовых матриц ( $A = A^*$ ) собственные значения всегда действительные.

**Решение.**

1. Пусть  $\lambda$  - собственное значение матрицы  $A$ , а  $x \neq 0$  - собственный вектор, тогда:

$$Ax = \lambda x$$

$$x^* Ax = \lambda x^* x$$

## Упражнение

Докажите, что для эрмитовых матриц ( $A = A^*$ ) собственные значения всегда действительные.

**Решение.**

1. Пусть  $\lambda$  - собственное значение матрицы  $A$ , а  $x \neq 0$  - собственный вектор, тогда:

$$Ax = \lambda x$$

$$x^* Ax = \lambda x^* x$$

2. Так как  $A = A^*$ , выражение слева - эрмитово (вещественное) число, значит:

$$(x^* Ax)^* = x^* A^* x = x^* Ax$$

$$(\lambda x^* x)^* = \lambda^* x^* x = (x^* Ax)^* = \lambda x^* x$$

## Упражнение

Докажите, что для эрмитовых матриц ( $A = A^*$ ) собственные значения всегда действительные.

**Решение.**

1. Пусть  $\lambda$  - собственное значение матрицы  $A$ , а  $x \neq 0$  - собственный вектор, тогда:

$$Ax = \lambda x$$

$$x^* Ax = \lambda x^* x$$

2. Так как  $A = A^*$ , выражение слева - эрмитово (вещественное) число, значит:

$$(x^* Ax)^* = x^* A^* x = x^* Ax$$

$$(\lambda x^* x)^* = \lambda^* x^* x = (x^* Ax)^* = \lambda x^* x$$

3. Поскольку  $x^* x > 0$ , отсюда следует:

$$\lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

# Степенной метод

## 1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

# Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ .

# Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  и  $\lambda_1$  является наибольшим собственным значением и  $v_1$  является соответствующим собственным вектором.

## Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  и  $\lambda_1$  является наибольшим собственным значением и  $v_1$  является соответствующим собственным вектором.

4. На  $(k + 1)$ -й итерации приближение к  $\lambda_1$  может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

# Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  и  $\lambda_1$  является наибольшим собственным значением и  $v_1$  является соответствующим собственным вектором.

4. На  $(k + 1)$ -й итерации приближение к  $\lambda_1$  может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

5. Заметим, что  $\lambda^{(k+1)}$  не требуется для  $(k + 2)$ -й итерации, но может быть полезно для измерения ошибки на каждой итерации:  
 $\|Ax_{k+1} - \lambda^{(k+1)}x_{k+1}\|.$

# Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  и  $\lambda_1$  является наибольшим собственным значением и  $v_1$  является соответствующим собственным вектором.

4. На  $(k + 1)$ -й итерации приближение к  $\lambda_1$  может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

5. Заметим, что  $\lambda^{(k+1)}$  не требуется для  $(k + 2)$ -й итерации, но может быть полезно для измерения ошибки на каждой итерации:  
 $\|Ax_{k+1} - \lambda^{(k+1)}x_{k+1}\|.$
6. Скорость алгоритма геометрическая (линейная), но показатель сходимости равен  $q^k$ , где  $q = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ , для  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  и  $k$  - число итераций.

# Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  и  $\lambda_1$  является наибольшим собственным значением и  $v_1$  является соответствующим собственным вектором.

4. На  $(k + 1)$ -й итерации приближение к  $\lambda_1$  может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

5. Заметим, что  $\lambda^{(k+1)}$  не требуется для  $(k + 2)$ -й итерации, но может быть полезно для измерения ошибки на каждой итерации:  
 $\|Ax_{k+1} - \lambda^{(k+1)}x_{k+1}\|$ .
6. Скорость алгоритма геометрическая (линейная), но показатель сходимости равен  $q^k$ , где  $q = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ , для  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  и  $k$  - число итераций.
7. Это означает, что сходимость может быть произвольно малой. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть  $2 \times 2$  диагональную матрицу.

## Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы

## Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет  $\mathcal{O}(n)$  matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших  $n$ .

## Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет  $\mathcal{O}(n)$  matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших  $n$ .
- Сходимость может быть медленной

## Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

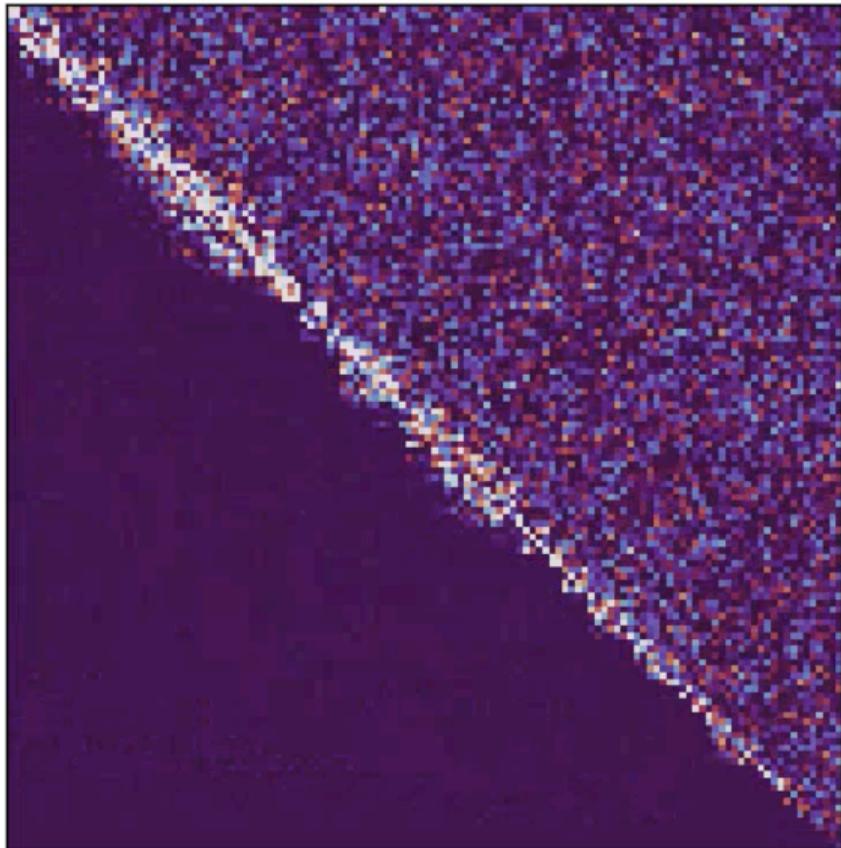
- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет  $\mathcal{O}(n)$  matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших  $n$ .
- Сходимость может быть медленной
- Если нужна только грубая оценка, достаточно нескольких итераций

## Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет  $\mathcal{O}(n)$  matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших  $n$ .
- Сходимость может быть медленной
- Если нужна только грубая оценка, достаточно нескольких итераций
- Решение вектор находится в **подпространстве Крылова**  $\{x_0, Ax_0, \dots, A^k x_0\}$  и имеет вид  $\mu A^k x_0$ , где  $\mu$  является нормирующим коэффициентом.

## В следующих сериях: QR-алгоритм

Случайная матрица



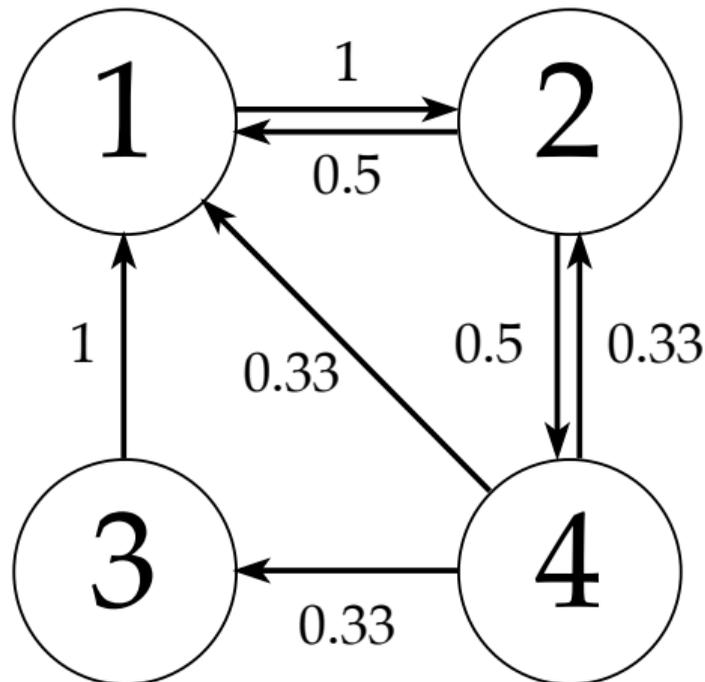
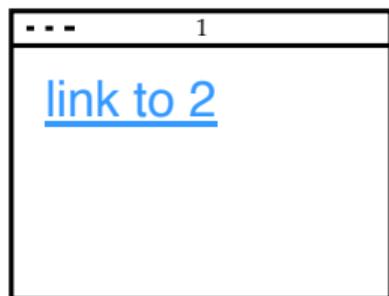
Симметричная матрица @fminxyz



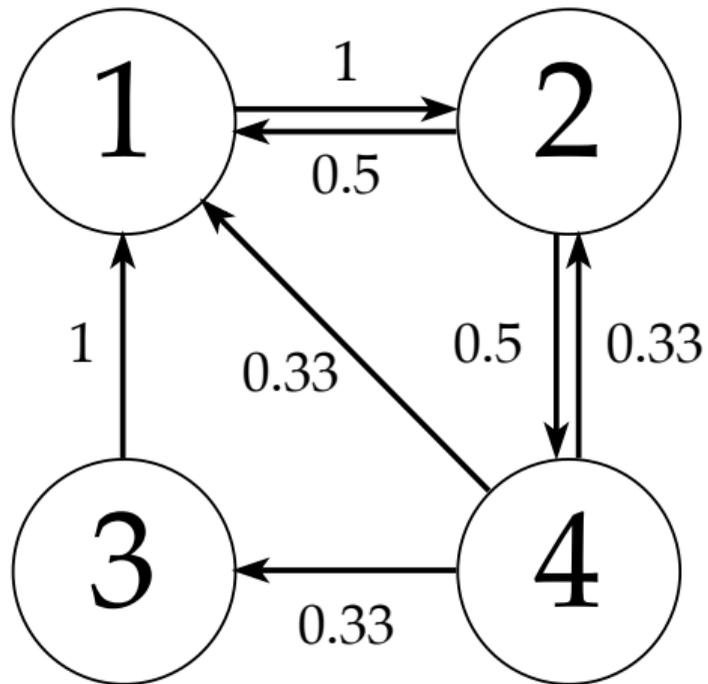
# PageRank

# PageRank

Рассмотрим простой пример. Предположим, что у нас есть 4 веб-сайта с некоторыми ссылками. Наша цель --- понять, насколько важен каждый из этих сайтов. Очевидно, что мы можем переформулировать эту проблему в терминах ориентированных графов. Здесь каждый узел представляет веб-сайт, а каждое ребро описывает ссылку с одного сайта на другой.



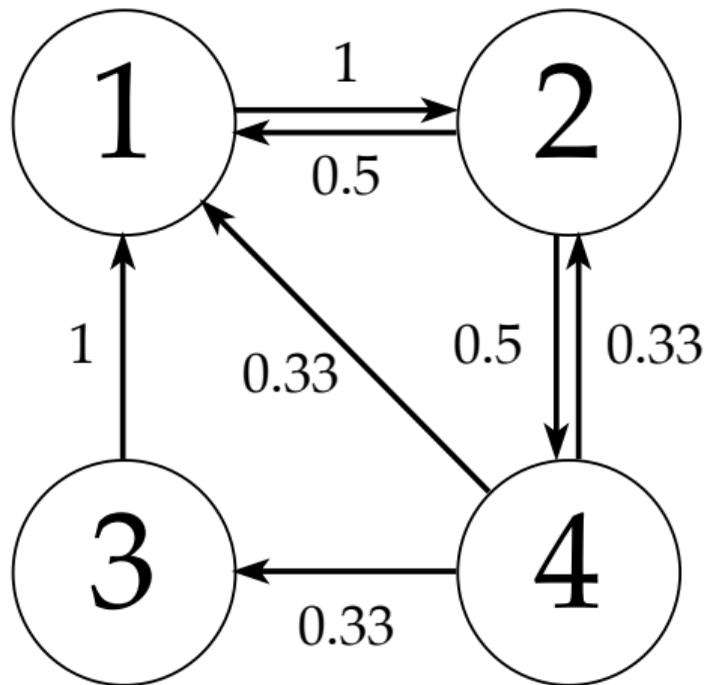
## PageRank



Таким образом, мы можем ввести матрицу переходов  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## PageRank



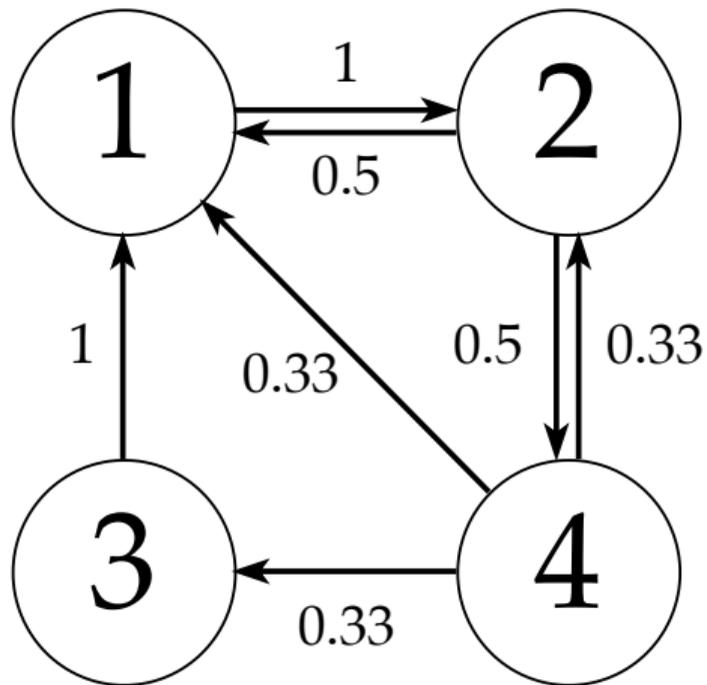
Таким образом, мы можем ввести матрицу переходов  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Давайте введём вектор PageRank  $x$ , который описывает важность каждого веб-сайта.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , где  $x_i$  - важность  $i$ -го веб-сайта

## PageRank



Таким образом, мы можем ввести матрицу переходов  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Давайте введём вектор PageRank  $x$ , который описывает важность каждого веб-сайта.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , где  $x_i$  - важность  $i$ -го веб-сайта

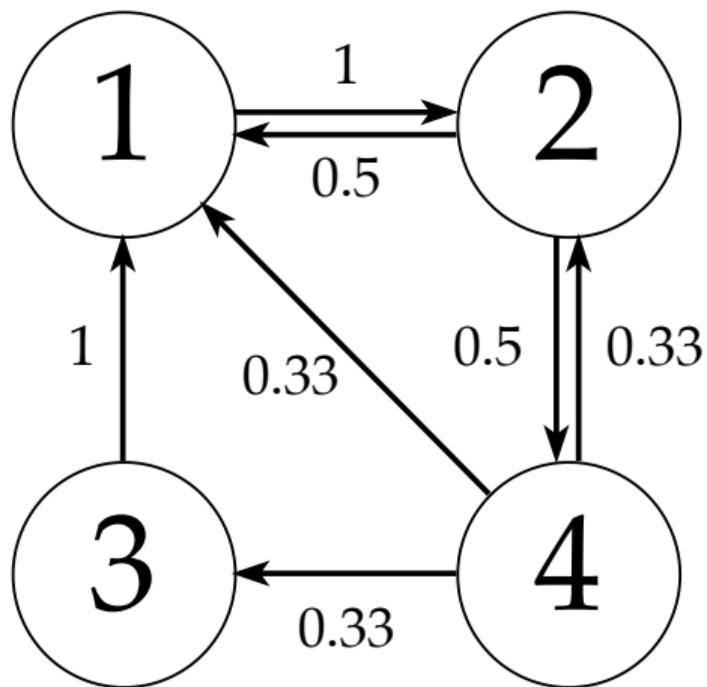
Предположим, что начальная важность равномерно распределена между всеми узлами. Тогда:

$$x^0 = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$$

Каждая входящая ссылка увеличивает важность узла. Таким образом, это обновление может быть записано как умножение матрицы на вектор:

$$x^1 = A \cdot x^0 = (0.46, 0.33, 0.08, 0.125)^T$$

# PageRank



Повторяя те же операции, мы можем легко увидеть сходимость:

$$\mathbf{x}^2 = A \cdot \mathbf{x}^1 = (0.29, 0.50, 0.04, 0.17)^\top$$

$$\mathbf{x}^3 = A \cdot \mathbf{x}^2 = (0.35, 0.35, 0.06, 0.25)^\top$$

...

$$\mathbf{x}^{14} = A \cdot \mathbf{x}^{13} = (0.33, 0.40, 0.07, 0.20)^\top$$

$$\mathbf{x}^{15} = A \cdot \mathbf{x}^{14} = (0.33, 0.40, 0.07, 0.20)^\top$$

Выполните упражнение 🧩 PageRank.