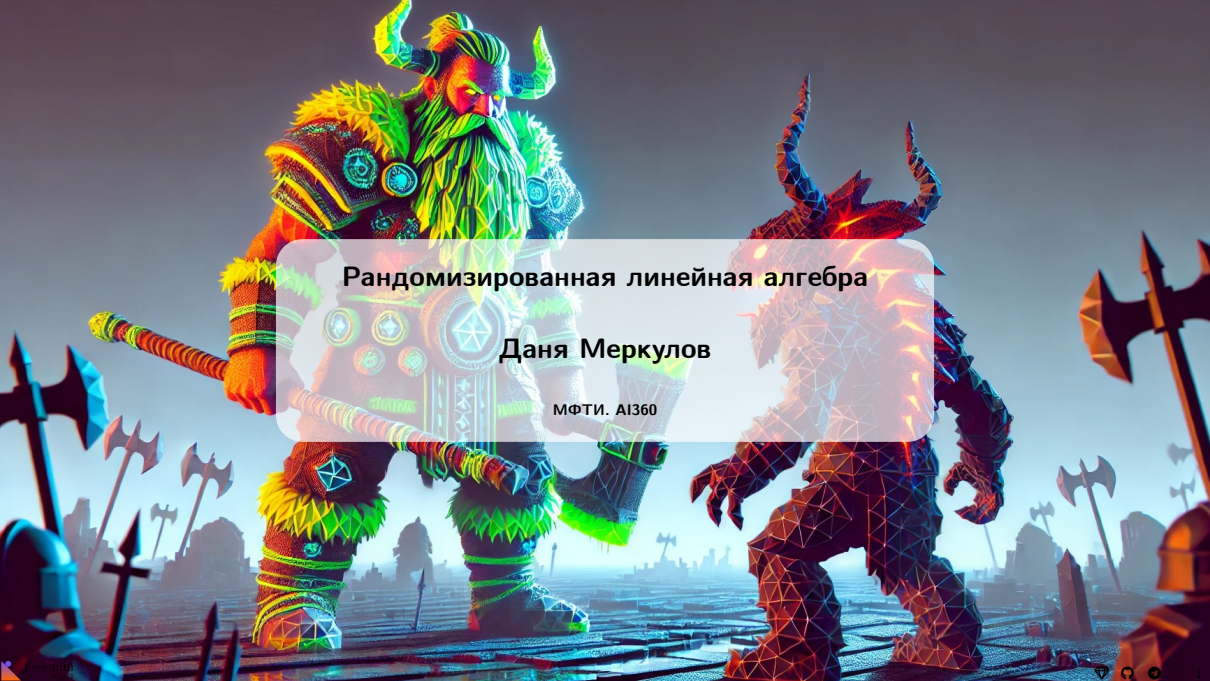




Рандомизированная линейная алгебра

Даня Меркулов

МФТИ. AI360

Рандомизированная линейная алгебра

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

поэлементно:

$\mathcal{O}(n^2)$

посчитать

$\mathcal{O}(n^3)$

$$\underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times n}{B} = \underset{n \times n}{C}$$

вычислить Cr n^2
вычислить Br n^2
вычислить $A \cdot Br$ n^2

проверить
равенство?

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Идея алгоритма:

1. Сгенерировать случайный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Идея алгоритма:

1. Сгенерировать случайный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.
2. Вычислить произведения Br и Cr .

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Идея алгоритма:

1. Сгенерировать случайный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.
2. Вычислить произведения Br и Cr .
3. Вычислить $A(Br)$ и сравнить полученный вектор с Cr .

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Идея алгоритма:

1. Сгенерировать случайный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.
2. Вычислить произведения Br и Cr .
3. Вычислить $A(Br)$ и сравнить полученный вектор с Cr .
4. Если $A(Br) \neq Cr$, то точно $AB \neq C$.

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Идея алгоритма:

1. Сгенерировать случайный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.
2. Вычислить произведения Br и Cr .
3. Вычислить $A(Br)$ и сравнить полученный вектор с Cr .
4. Если $A(Br) \neq Cr$, то точно $AB \neq C$.
5. Если $A(Br) = Cr$, то с вероятностью **не менее** $1 - 1/2$ мы угадали правильно. Для снижения вероятности ошибки до $1/2^k$ повторяем процедуру k раз с разными случайными векторами.

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Идея алгоритма:

1. Сгенерировать случайный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.
2. Вычислить произведения Br и Cr .
3. Вычислить $A(Br)$ и сравнить полученный вектор с Cr .
4. Если $A(Br) \neq Cr$, то точно $AB \neq C$.
5. Если $A(Br) = Cr$, то с вероятностью **не менее** $1 - 1/2$ мы угадали правильно. Для снижения вероятности ошибки до $1/2^k$ повторяем процедуру k раз с разными случайными векторами.

Проверка матричного равенства: Алгоритм Фрейвалдса

Пусть нам даны три матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и мы хотим проверить, равенство $AB = C$. Наивный способ - просто перемножить A и B за $\mathcal{O}(n^3)$ операций и сравнить с C .

Алгоритм Фрейвалдса показывает, что это можно сделать гораздо быстрее - за $\mathcal{O}(kn^2)$ операций при вероятности ошибки не более $1/2^k$.

Идея алгоритма:

1. Сгенерировать случайный вектор $r \in \mathbb{R}^n$.
2. Вычислить произведения Br и Cr .
3. Вычислить $A(Br)$ и сравнить полученный вектор с Cr .
4. Если $A(Br) \neq Cr$, то точно $AB \neq C$.
5. Если $A(Br) = Cr$, то с вероятностью **не менее** $1 - 1/2$ мы угадали правильно. Для снижения вероятности ошибки до $1/2^k$ повторяем процедуру k раз с разными случайными векторами.

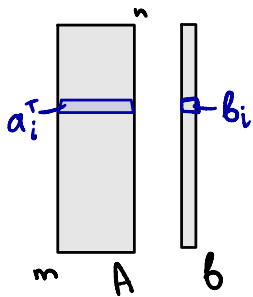
Сложность каждого шага: $\mathcal{O}(n^2)$ (домножение на вектор), поэтому общее время $\mathcal{O}(kn^2)$.

Рандомизированное решение линейной системы

Рассмотрим СЛАУ

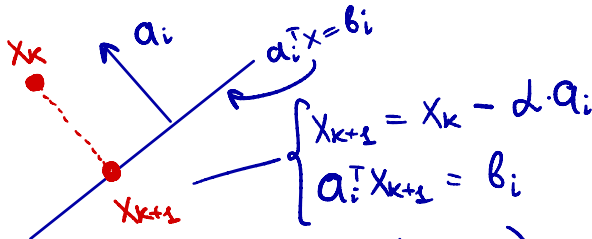
$$Ax = b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Метод Качмарца (Kaczmarz) обновляет приближение x_k путём выборки случайной строки i (обычно с вероятностью пропорциональной $\|a_i\|^2$):



$$(a_i^T x = b_i, i = 1, \dots, m)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$



$$a_i^T x_k - d \|a_i\|^2 = b_i \Rightarrow d = \frac{b_i - a_i^T x_k}{\|a_i\|^2}$$

Рандомизированное решение линейной системы

Рассмотрим СЛАУ

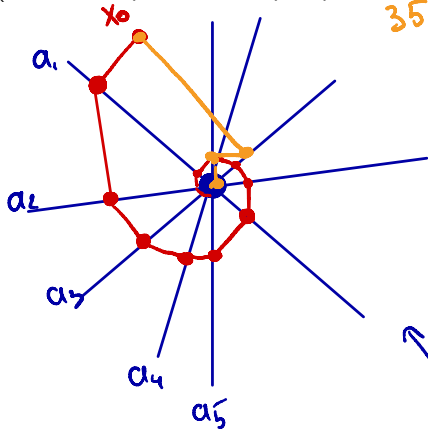
$$Ax = b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Метод Качмарца (Kaczmarz) обновляет приближение x_k путём выборки случайной строки i (обычно с вероятностью пропорциональной $\|a_i\|^2$):

35 421

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$

$O(n)$ ✓ супер дешево



$A \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$

Рандомизированное решение линейной системы

Рассмотрим СЛАУ

$$Ax = b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Метод Качмарца (Kaczmarz) обновляет приближение x_k путём выборки случайной строки i (обычно с вероятностью пропорциональной $\|a_i\|^2$):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$

- Если система совместна, метод сходится к точному решению.

Рандомизированное решение линейной системы

Рассмотрим СЛАУ

$$Ax = b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Метод Качмарца (Kaczmarz) обновляет приближение x_k путём выборки случайной строки i (обычно с вероятностью пропорциональной $\|a_i\|^2$):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$

- Если система совместна, метод сходится к точному решению.
- Если система переопределена или шумна, то можно показать сходимость к решению наилучшего приближения.

Рандомизированное решение линейной системы

Рассмотрим СЛАУ

$$Ax = b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Метод Качмарца (Kaczmarz) обновляет приближение x_k путём выборки случайной строки i (обычно с вероятностью пропорциональной $\|a_i\|^2$):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$

- Если система совместна, метод сходится к точному решению.
- Если система переопределена или шумна, то можно показать сходимость к решению наилучшего приближения.
- С точки зрения SGD это шаг стохастического градиента для задачи минимизации $\|Ax - b\|^2$.

Рандомизированное решение линейной системы

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$\forall f \in \mathbb{R}^n \rightarrow A^T(Ax - b) = 0$$

Рассмотрим СЛАУ

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Метод Качмарца (Kaczmarz) обновляет приближение x_k путём выборки случайной строки i (обычно с вероятностью пропорциональной $\|a_i\|^2$):

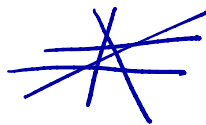
$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$

$$A^T A x = A^T b$$
$$x^* = (A^T A)^+ A^T b$$

- Если система совместна, метод сходится к точному решению.
- Если система переопределена или шумна, то можно показать сходимость к решению наилучшего приближения.
- С точки зрения SGD это шаг стохастического градиента для задачи минимизации $\|Ax - b\|^2$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (a_i^T x - b_i)^2 \rightarrow \min_x$$

Рандомизированное решение линейной системы



Рассмотрим СЛАУ

$$Ax = b,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Метод Качмарца (Kaczmarz) обновляет приближение x_k путём выборки случайной строки i (обычно с вероятностью пропорциональной $\|a_i\|^2$):

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$

$$r_{k+1} \leq C r_k \leq C^2 r_{k-1} \leq \dots$$

- Если система совместна, метод сходится к точному решению.
- Если система переопределена или шумна, то можно показать сходимость к решению наилучшего приближения.
- С точки зрения SGD это шаг стохастического градиента для задачи минимизации $\|Ax - b\|^2$.

Скорость сходимости:

$$\mathbb{E}[\|x_{k+1} - x^*\|^2] \leq \left(1 - \frac{1}{\kappa_F^2(A)}\right) \mathbb{E}[\|x_k - x^*\|^2],$$

$$r_{k+1} \leq C \cdot r_k$$

Линейная
сходимость
(геометрическая)

(экспоненциальная)

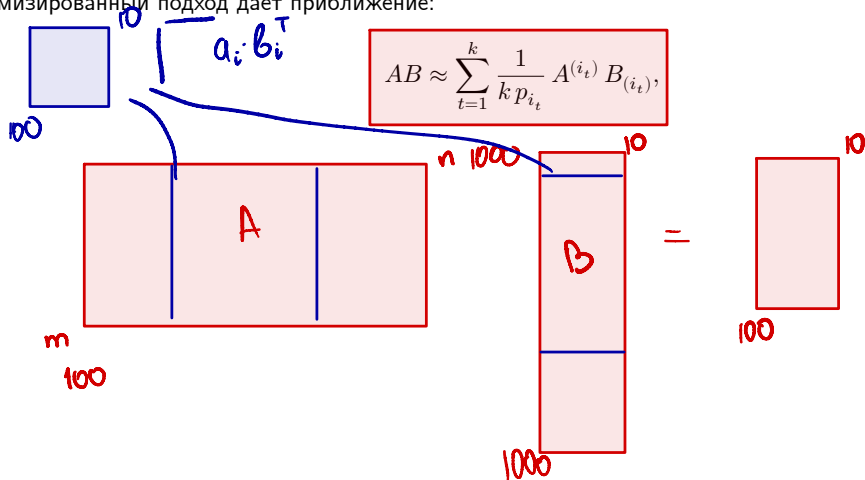
1

$$\text{где } \kappa_F(A) = \frac{\|A\|_F}{\sigma_{\min}(A)}.$$

Рандомизированное матричное умножение

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C$$

Хотим приблизить произведение AB , где $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Стоимость точного умножения: $\mathcal{O}(mnp)$. Рандомизированный подход даёт приближение:



Рандомизированное матричное умножение

Хотим приблизить произведение AB , где $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Стоимость точного умножения: $\mathcal{O}(mnp)$. Рандомизированный подход даёт приближение:

$$AB \approx \sum_{t=1}^k \frac{1}{k p_{i_t}} A^{(i_t)} B_{(i_t)},$$

где $A^{(i_t)}$ - i_t -й столбец A , а $B_{(i_t)}$ - i_t -я строка B , а p_{i_t} - вероятность выбора i_t -го столбца/строки. Обычно p_i пропорциональны $\|A^{(i)}\| \|B_{(i)}\|$ (или другой норме).

Рандомизированное матричное умножение

Хотим приблизить произведение AB , где $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Стоимость точного умножения: $\mathcal{O}(mnp)$. Рандомизированный подход даёт приближение:

$$AB \approx \sum_{t=1}^k \frac{1}{k p_{i_t}} A^{(i_t)} B_{(i_t)},$$

где $A^{(i_t)}$ - i_t -й столбец A , а $B_{(i_t)}$ - i_t -я строка B , а p_{i_t} - вероятность выбора i_t -го столбца/строки. Обычно p_i пропорциональны $\|A^{(i)}\| \|B_{(i)}\|$ (или другой норме).

Идея:

1. По нормам столбцов A (и строк B) выбираем k столбцов-строк.

Рандомизированное матричное умножение

Хотим приблизить произведение AB , где $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Стоимость точного умножения: $\mathcal{O}(mnp)$. Рандомизированный подход даёт приближение:

$$AB \approx \sum_{t=1}^k \frac{1}{k p_{i_t}} A^{(i_t)} B_{(i_t)},$$

где $A^{(i_t)}$ - i_t -й столбец A , а $B_{(i_t)}$ - i_t -я строка B , а p_{i_t} - вероятность выбора i_t -го столбца/строки. Обычно p_i пропорциональны $\|A^{(i)}\| \|B_{(i)}\|$ (или другой норме).

Идея:

1. По нормам столбцов A (и строк B) выбираем k столбцов-строк.
2. Усреднённая сумма полученных ранга- k матриц приближает всё произведение.

Рандомизированное матричное умножение

Хотим приблизить произведение AB , где $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Стоимость точного умножения: $\mathcal{O}(mnp)$. Рандомизированный подход даёт приближение:

$$AB \approx \sum_{t=1}^k \frac{1}{k p_{i_t}} A^{(i_t)} B_{(i_t)},$$

где $A^{(i_t)}$ - i_t -й столбец A , а $B_{(i_t)}$ - i_t -я строка B , а p_{i_t} - вероятность выбора i_t -го столбца/строки. Обычно p_i пропорциональны $\|A^{(i)}\| \|B_{(i)}\|$ (или другой норме).

Идея:

1. По нормам столбцов A (и строк B) выбираем k столбцов-строк.
2. Усреднённая сумма полученных ранга- k матриц приближает всё произведение.

Рандомизированное матричное умножение

$$n^3 \rightarrow n^2$$

Хотим приблизить произведение AB , где $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Стоимость точного умножения: $\mathcal{O}(mnp)$. Рандомизированный подход даёт приближение:

$$AB \approx \sum_{t=1}^k \frac{1}{k p_{i_t}} A^{(i_t)} B_{(i_t)},$$

где $A^{(i_t)}$ - i_t -й столбец A , а $B_{(i_t)}$ - i_t -я строка B , а p_{i_t} - вероятность выбора i_t -го столбца/строки. Обычно p_i пропорциональны $\|A^{(i)}\| \|B_{(i)}\|$ (или другой норме).

Идея:

1. По нормам столбцов A (и строк B) выбираем k столбцов-строк.
2. Усреднённая сумма полученных ранга- k матриц приближает всё произведение.

Сложность $\mathcal{O}(mnk)$, если $k \ll p$, экономим по сравнению с $\mathcal{O}(mnp)$.

Оценка следа матрицы методом Хатчинсона¹

$$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$\text{tr}(X)$$

Пусть $X \in \mathbb{R}^{d \times d}$ и $v \in \mathbb{R}^d$ - случайный вектор такой, что $\mathbb{E}[vv^T] = I$. Тогда,

$$\text{Tr}(X) = \mathbb{E}[v^T X v] = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V v_i^T X v_i$$

Интересно, что для оценки следа матрицы иногда можно не знать самой матрицы. Например, в современных моделях машинного обучения можно вычислять произведение гессиана функции на произвольный вектор, не вычисляя сам гессиан с помощью автоматического дифференцирования. ☁ Пример

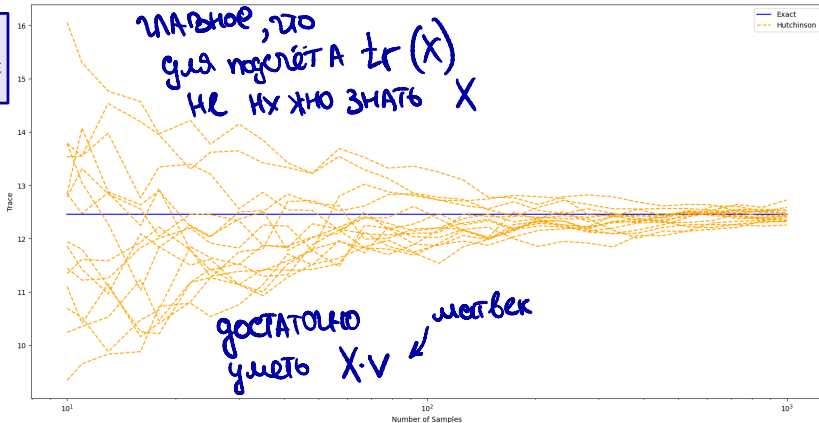
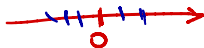


Рис. 1: Source

¹A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for Laplacian smoothing splines - M.F. Hutchinson, 1990

Оценка следа матрицы методом Жирара

пусть $v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$



Метод Жирара:

- Предшественник метода Хатчинсона, где вектор V берём из $\mathcal{N}(0, I)$ (гауссовский).
- Дисперсия получается немного больше, чем у Хатчинсона (у хатчинсона минимальная дисперсия).

$$V^T X V = \sum_{i,j} V_i \cdot X_{ij} \cdot V_j \quad \leftarrow V_i \cdot V_j$$

$\times 3$

$\swarrow$ off-diag $\searrow$ diag

$V_i X_{ij} V_j$ $V_i X_{ii} V_i \geq 0$

$$V \in [-1; 1]^d$$

Оценка следа матрицы методом Жирара

Метод Жирара:

- Предшественник метода Хатчинсона, где вектор w берём из $\mathcal{N}(0, I)$ (гауссовский).
- Дисперсия получается немного больше, чем у Хатчинсона (у хатчинсона минимальная дисперсия).

Intrinsic dimension (intdim):

Для симметричной положительно определённой матрицы A вводится понятие

$$\text{intdim}(A) = \frac{\text{Tr}(A)}{\|A\|_F}.$$

Оценка следа матрицы методом Жирара

Метод Жирара:

- Предшественник метода Хатчинсона, где вектор w берём из $\mathcal{N}(0, I)$ (гауссовский).
- Дисперсия получается немного больше, чем у Хатчинсона (у хатчинсона минимальная дисперсия).

Intrinsic dimension (intdim):

Для симметричной положительно определённой матрицы A вводится понятие

$$\text{intdim}(A) = \frac{\text{Tr}(A)}{\|A\|_F}.$$

- Минимальное значение равно 1.

Оценка следа матрицы методом Жирара

Метод Жирара:

- Предшественник метода Хатчинсона, где вектор w берём из $\mathcal{N}(0, I)$ (гауссовский).
- Дисперсия получается немного больше, чем у Хатчинсона (у хатчинсона минимальная дисперсия).

Intrinsic dimension (intdim):

Для симметричной положительно определённой матрицы A вводится понятие

$$\text{intdim}(A) = \frac{\text{Tr}(A)}{\|A\|_F}.$$

- Минимальное значение равно 1.
- Максимальное - при всех сингулярных (или собственных) значениях равных, тогда $\text{intdim}(A)$ может достичь $\sqrt{\text{rank}(A)}$.

Оценка следа матрицы методом Жирара

Метод Жирара:

- Предшественник метода Хатчинсона, где вектор w берём из $\mathcal{N}(0, I)$ (гауссовский).
- Дисперсия получается немного больше, чем у Хатчинсона (у хатчинсона минимальная дисперсия).

Intrinsic dimension (intdim):

Для симметричной положительно определённой матрицы A вводится понятие

$$\text{intdim}(A) = \frac{\text{Tr}(A)}{\|A\|_F}.$$

- Минимальное значение равно 1.
- Максимальное - при всех сингулярных (или собственных) значениях равных, тогда $\text{intdim}(A)$ может достичь $\sqrt{\text{rank}(A)}$.

Оценка следа матрицы методом Жирара

Метод Жирара:

- Предшественник метода Хатчинсона, где вектор w берём из $\mathcal{N}(0, I)$ (гауссовский).
- Дисперсия получается немного больше, чем у Хатчинсона (у хатчинсона минимальная дисперсия).

Intrinsic dimension (intdim):

Для симметричной положительно определённой матрицы A вводится понятие

$$\text{intdim}(A) = \frac{\text{Tr}(A)}{\|A\|_F}.$$

- Минимальное значение равно 1.
- Максимальное - при всех сингулярных (или собственных) значениях равных, тогда $\text{intdim}(A)$ может достичь $\sqrt{\text{rank}(A)}$.

С помощью этой величины можно оценивать вероятность больших отклонений случайной оценки следа.

Рандомизированный SVD

Напомним, что SVD матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Для больших m и n полное вычисление SVD занимает $\mathcal{O}(\min\{mn^2, m^2n\})$.

Рандомизированный подход (Halko et al., 2011):

1. Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ со случайными элементами.

Параметр p - **oversampling**, чтобы уменьшить ошибку.

Рандомизированный SVD

Напомним, что SVD матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Для больших m и n полное вычисление SVD занимает $\mathcal{O}(\min\{mn^2, m^2n\})$.

Рандомизированный подход (Halko et al., 2011):

1. Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ со случайными элементами.
2. Считаем $Y = A \cdot G$ и делаем QR-разложение $Y = QR$.

Параметр p - **oversampling**, чтобы уменьшить ошибку.

Рандомизированный SVD

Напомним, что SVD матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Для больших m и n полное вычисление SVD занимает $\mathcal{O}(\min\{mn^2, m^2n\})$.

Рандомизированный подход (Halko et al., 2011):

1. Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ со случайными элементами.
2. Считаем $Y = A \cdot G$ и делаем QR-разложение $Y = QR$.
3. Утверждается, что $QQ^T A \approx A$ при хорошей выборке и $k + p$ надёжно покрывают ведущие сингулярные компоненты.

Параметр p - **oversampling**, чтобы уменьшить ошибку.

Рандомизированный SVD

Напомним, что SVD матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Для больших m и n полное вычисление SVD занимает $\mathcal{O}(\min\{mn^2, m^2n\})$.

Рандомизированный подход (Halko et al., 2011):

1. Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ со случайными элементами.
2. Считаем $Y = A \cdot G$ и делаем QR-разложение $Y = QR$.
3. Утверждается, что $QQ^T A \approx A$ при хорошей выборке и $k + p$ надёжно покрывают ведущие сингулярные компоненты.
4. Строим $B = Q^T A$, у которого размер $(k + p) \times n$.

Параметр p - **oversampling**, чтобы уменьшить ошибку.

Рандомизированный SVD

Напомним, что SVD матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Для больших m и n полное вычисление SVD занимает $\mathcal{O}(\min\{mn^2, m^2n\})$.

Рандомизированный подход (Halko et al., 2011):

1. Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ со случайными элементами.
2. Считаём $Y = A \cdot G$ и делаем QR-разложение $Y = QR$.
3. Утверждается, что $QQ^T A \approx A$ при хорошей выборке и $k + p$ надёжно покрывают ведущие сингулярные компоненты.
4. Строим $B = Q^T A$, у которого размер $(k + p) \times n$.
5. Вычисляем точное SVD для $B = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T$.

Параметр p - **oversampling**, чтобы уменьшить ошибку.

Рандомизированный SVD

Напомним, что SVD матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Для больших m и n полное вычисление SVD занимает $\mathcal{O}(\min\{mn^2, m^2n\})$.

Рандомизированный подход (Halko et al., 2011):

1. Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ со случайными элементами.
2. Считаем $Y = A \cdot G$ и делаем QR-разложение $Y = QR$.
3. Утверждается, что $QQ^T A \approx A$ при хорошей выборке и $k + p$ надёжно покрывают ведущие сингулярные компоненты.
4. Строим $B = Q^T A$, у которого размер $(k + p) \times n$.
5. Вычисляем точное SVD для $B = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T$.
6. Тогда $U = Q\hat{U}$, и получаем искомое разложение (приближённое).

Параметр p - **oversampling**, чтобы уменьшить ошибку.