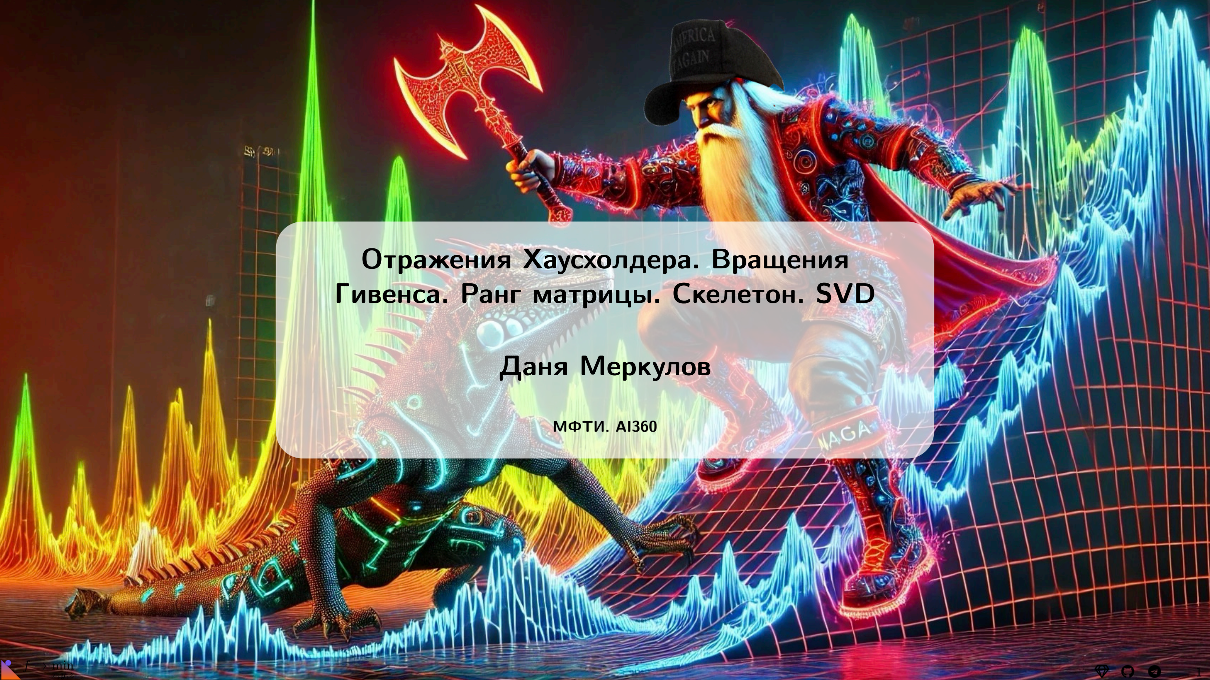


Отражения Хаусхолдера. Вращения Гивенса. Ранг матрицы. Скелетон. SVD

Даня Меркулов

МФТИ. AI360

Ортогональные матрицы

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\boxed{\|Uz\|_2 = \|z\|_2}$ для всех z.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$\boxed{U^T U = I_n,}$$

$U^* U = I$

$UU^T = U^T U = I$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

  где I_n - единичная матрица $n \times n$.
- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = UU^T = I_n,$$

  что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.
- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = UU^* = I_n,$$

  где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

  где I_n - единичная матрица $n \times n$.
- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

  что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.
- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

  где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.
- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
    - $U^T U = I_n$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$

U

$U^TU=I$

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
  - $U^T U = I_n$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$
  - $U U^T = I_m$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными строками** для $m < n$

Ортогональные матрицы

Важное свойство: **произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей:**

$$(UV)^TUV = V^T\overbrace{U^TU}^{=I}V = \underbrace{V^TV}_{I} = I,$$

UV – ортогональна

- Позже мы покажем, что существуют типы матриц (**отражения Хаусхолдера** и **вращения Гивенса**) композиция которых способна произвести любую унитарную матрицу

Ортогональные матрицы

Важное свойство: **произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей:**

$$(UV)^T UV = V^T U^T UV = V^T V = I,$$

- Позже мы покажем, что существуют типы матриц (**отражения Хаусхолдера** и **вращения Гивенса**) композиция которых способна произвести любую унитарную матрицу
- Эта идея является основой некоторых алгоритмов, например, QR-разложения

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

- Для $\|\cdot\|_2$ это следует из определения операторной нормы и того факта, что векторная 2-норма является ортогонально инвариантной.

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

- Для $\|\cdot\|_2$ это следует из определения операторной нормы и того факта, что векторная 2-норма является ортогонально инвариантной.
- Для $\|\cdot\|_F$ это следует из $\|A\|_F^2 = \mathrm{trace}(A^T A)$ и того факта, что $\mathrm{trace}(BC) = \mathrm{trace}(CB)$.

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки
- Матрица отражения Хаусхолдера

Примеры ортогональных матриц

* Матрица вращения
* Матрица перестановки
* Матрица отражения Хаусхолдера
* Матрица вращения Гивенса

Матрица отражения Хаусхолдера

Матрица отражения Хаусхолдера - это ортогональная матрица, которая используется для отражения вектора относительно гиперплоскости. Она имеет следующий вид:

$$
\boxed{H \equiv H(v) = I - 2vv^T,}
$$

где v - вектор длины n и $\boxed{v^T v = 1.}$ $\Rightarrow \|v\|^2 = 1$

- Покажите, что H - ортогональная матрица и $H^T = H$.

$$v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

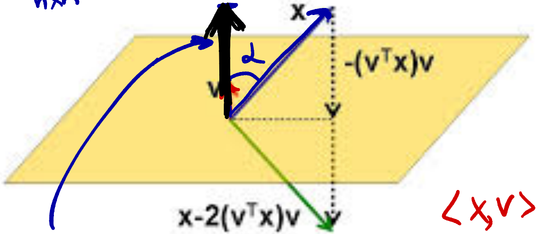
$$\underbrace{\underset{n\times 1}{v}\cdot \underset{1\times n}{v^T}}_{n\times n}$$

$$H(v)\cdot x = $$

$$= \left(I - 2vv^T\right)x =$$

$$= x - 2v\underline{v^T x} =$$

$$\boxed{= x - 2v^T x \cdot v}$$



$$\Pi_v(x) = \frac{v}{\|v\|}\cdot \|x\|\cdot\cos\alpha =$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|\cdot\|v\|}$$

$$= \frac{v}{\|v\|}\cdot\cancel{\|x\|}\cdot\frac{\langle x, v\rangle}{\cancel{\|x\|}\cdot\|v\|} = v\cdot\frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2}$$

Матрица отражения Хаусхолдера

Матрица отражения Хаусхолдера - это ортогональная матрица, которая используется для отражения вектора относительно гиперплоскости. Она имеет следующий вид:

$$H \equiv H(v) = I - 2vv^T,$$

где v - вектор длины n и $v^Tv = 1$.

- Покажите, что H - ортогональная матрица и $H^T = H$.
- Покажите, что H - отражение:

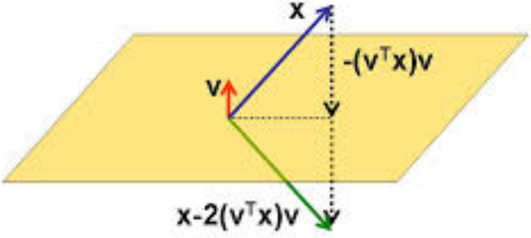
$$Hx = x - 2(v^Tx)v$$

$$H = H^T$$

$$(I - 2vv^T)^T = I^T - (2vv^T)^T =$$

$$= I - 2v^{T^T} \cdot v^T =$$

$$= I - 2vv^T = H$$



Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

Есть $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \boxed{\alpha e_1,}$$

где α - неизвестная константа.

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1, \longrightarrow$$

$$x - \alpha e_1 = 2(v^T x) v$$

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2 v^T x}$$

где α - неизвестная константа.

- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\boxed{\|x\|_2 = \|Hx\|_2} = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|$$

$$|\alpha| = \|x\|_2$$

$$\alpha = \pm \|x\|$$

и $\alpha = \pm\|x\|_2$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$
H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$
Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,
$$

  где α - неизвестная константа.
- Так как $\| \cdot \|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$
\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.
$$

  и $\alpha = \pm \|x\|_2$
- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$
\boxed{v = \frac{x - \alpha e_1}{2 v^T x}}
$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$
H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$
Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,
$$

  где α - неизвестная константа.
- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$
\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.
$$

  и $\alpha = \pm\|x\|_2$
- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$
v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}
$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$
x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;
$$

  или

$$
\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.
$$

$$
v^T x = \sqrt{\frac{\|x\|_2^2 - \alpha x_1}{2}}
$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

где α - неизвестная константа.
- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

и $\alpha = \pm\|x\|_2$
- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;$$

или

$$\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.$$

- Следовательно,

$$(v^T x)^2 = \frac{\|x\|_2^2 - \alpha x_1}{2}.$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$\boxed{H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.}$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

  где α - неизвестная константа.
- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

  и $\alpha = \pm\|x\|_2$
- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;$$

  или

$$\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.$$

- Следовательно,

$$(v^T x)^2 = \frac{\|x\|_2^2 - \alpha x_1}{2}.$$

- Таким образом, v существует и равно

$$\boxed{v = \frac{x \mp \|x\|_2 e_1}{2v^T x} = \frac{x \mp \|x\|_2 e_1}{\pm\sqrt{2(\|x\|_2^2 \mp \|x\|_2 x_1)}}.}$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$
H_2 H_1 A = \begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times \\
0 & \times & \times & \times \\
0 & 0 & \times & \times \\
0 & 0 & \times & \times \\
0 & 0 & \times & \times
\end{bmatrix}
$$

$$
H_1 A = H_1 \begin{bmatrix}
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet
\end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\bullet & \bullet & \bullet \\
0 & \bullet & \bullet \\
0 & \bullet & \bullet
\end{bmatrix}
$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$
H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$
\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Получаем

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Получаем

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

- Аналогично находим H_4 и получаем верхнюю треугольную матрицу.

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Получаем

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

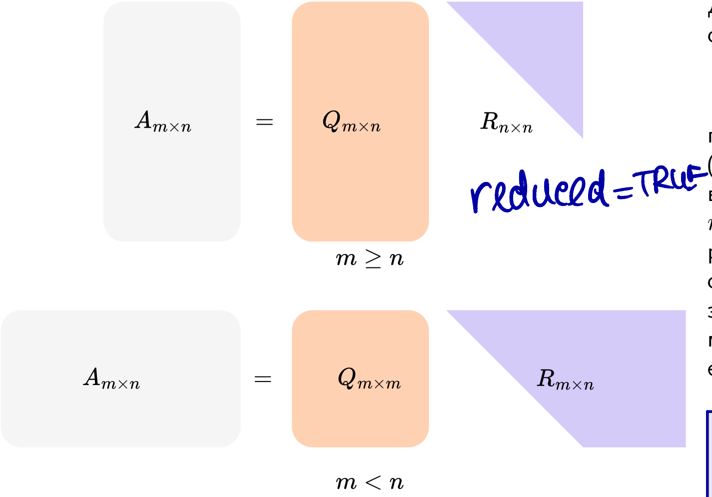
- Аналогично находим H_4 и получаем верхнюю треугольную матрицу.
- Так как произведение ортогональных и обратная к ортогональной матрицы являются ортогональными матрицами, мы получаем **следствие:** (QR-разложение) Любая $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ может быть представлена как

$$\boxed{A = QR,}$$

где Q - ортогональная и R - верхняя треугольная. См. постер, каковы размеры Q и R для $n > m$ и $n < m$.

QR-разложение матрицы

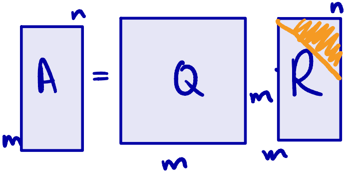
Q,R = np.linalg.qr(A)



Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует разложение вида:

$$A = QR,$$

где $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - ортогональная матрица ($Q^TQ = QQ^T = I$), а $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - верхнетреугольная матрица. В случае, когда $m > n$, матрица Q может быть усечена до размера $m \times n$ с сохранением ортогональности столбцов. Если зафиксировать все диагональные элементы матрицы R, то разложение становится единственным.



Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$\boxed{G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}$$

матрица поворота

Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$
\underbrace{G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{2\times 2}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad i=2,\ j=4
$$

Легко проверить, что $G^T G = G G^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$
\boxed{\underset{2\times 1}{x'} = \underset{2\times 2}{G}\,\underset{2\times 1}{x},}
$$

где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$
x'_i = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x'_j = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,
$$

при этом остальные x_k остаются неизменными.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

  Легко проверить, что $G^T G = G G^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$x' = Gx,$$

  где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$x_i' = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x_j' = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,$$

  при этом остальные x_k остаются неизменными.

- Чтобы обнулить j-ю координату вектора, выбираем угол α так, что:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}}$$

после поворота j-ая координата зануляется

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

  Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$x' = Gx,$$

  где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$x'_i = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x'_j = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,$$

  при этом остальные x_k остаются неизменными.

x_1
x_2
x_3
$\vdots$
x_n

- Чтобы обнулить j-ю координату вектора, выбираем угол α так, что:

$$\cos\alpha = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

- Применяя последовательно матрицы Гивенса, можно привести матрицу к верхнетреугольному виду: для этого нужно $n - 1$ вращений, чтобы обнулить элементы под главной диагональю в каждом столбце.

QR через вращения Гивенса

Также мы можем сделать матрицу верхнетреугольной с помощью вращений Гивенса:

$$
\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ * & \times & \times \\ * & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_1} \begin{bmatrix} * & \times & \times \\ * & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_2} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & * & \times \\ 0 & * & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{G_3} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}
$$

$$G_5 G_4 G_3 G_2 G_1 A = R$$

Вращения Гивенса vs. отражения Хаусхолдера

- Отражения Хаусхолдера полезны для плотных матриц (сложность приблизительно в два раза меньше, чем для Якоби) и мы должны обнулить большое количество элементов.

Вращения Гивенса vs. отражения Хаусхолдера

- Отражения Хаусхолдера полезны для плотных матриц (сложность приблизительно в два раза меньше, чем для Якоби) и мы должны обнулить большое количество элементов.
- Вращения Гивенса более подходят для разреженных матриц или параллельных вычислений, так как они действуют локально на элементах.

Ранг матрицы

Скелетное разложение матрицы

Простое, но очень интересное разложение - скелетное, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Скелетное разложение матрицы

Простое, но очень интересное разложение - скелетное, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение отсылает к любопытному факту: вы можете случайным образом выбрать r линейно независимых столбцов матрицы и любых r линейно независимых строк матрицы и хранить только их, при этом имея возможность точно восстановить всю матрицу.

$m \cdot n \qquad mr + n \cdot r = r(m+n)$

Скелетное разложение матрицы

Простое, но очень интересное разложение - скелетное, которое может быть записано в двух формах:

$$\boxed{A = UV^T} \qquad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение отсылает к любопытному факту: вы можете случайным образом выбрать r линейно независимых столбцов матрицы и любых r линейно независимых строк матрицы и хранить только их, при этом имея возможность точно восстановить всю матрицу.

Применения скелетного разложения:

- Упрощение модели, сжатие данных и ускорение вычислений в численных методах: для матрицы ранга r с $r \ll n, m$ достаточно хранить $\mathcal{O}((n+m)r) \ll nm$ элементов.

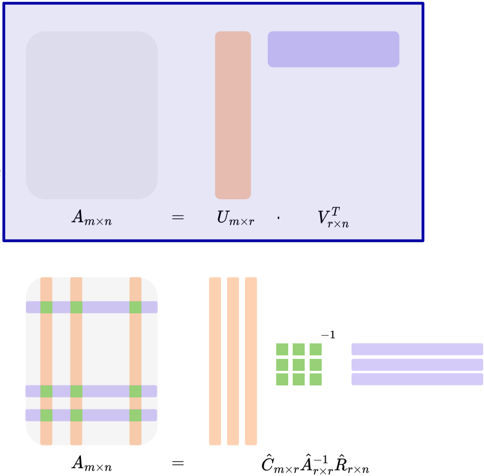


Рис. 1: Иллюстрация скелетного разложения

Скелетное разложение матрицы

Простое, но очень интересное разложение - скелетное, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение отсылает к любопытному факту: вы можете случайным образом выбрать r линейно независимых столбцов матрицы и любых r линейно независимых строк матрицы и хранить только их, при этом имея возможность точно восстановить всю матрицу.

Применения скелетного разложения:

- Упрощение модели, сжатие данных и ускорение вычислений в численных методах: для матрицы ранга r с $r \ll n, m$ достаточно хранить $\mathcal{O}((n+m)r) \ll nm$ элементов.
- Извлечение признаков в машинном обучении, где также известно как матричное разложение.

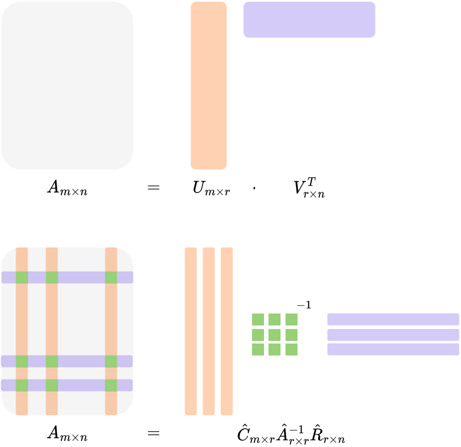


Рис. 1: Иллюстрация скелетного разложения

LoRA: Low-Rank Adaptation of Large Language Models (arXiv:2106.09685)

Так как современные LLM слишком большие, чтобы поместиться в память обычной GPU, мы используем некоторые трюки, чтобы сделать потребление памяти меньше. Один из самых популярных трюков - LoRA (Low-Rank Adaptation of Large Language Models).

Предположим, что у нас есть матрица $W \in \mathbb{R}^{d \times k}$ и мы хотим выполнить следующее обновление:

ищем $W = ?$

$$
\boxed{W = W_0 + \Delta W.}
$$

Основная идея LoRA - разложить обновление ΔW на две низкоранговые матрицы:

$$
W = W_0 + \Delta W = W_0 + BA, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times k},
$$
$$
rank(A) = rank(B) = r \ll \min\{d, k\}.
$$

Проверьте ноутбук для примера реализации LoRA.

1 число = 32 бита

16 бит

$3 \cdot 10^9 \cdot 2$ байта

6 ГБ

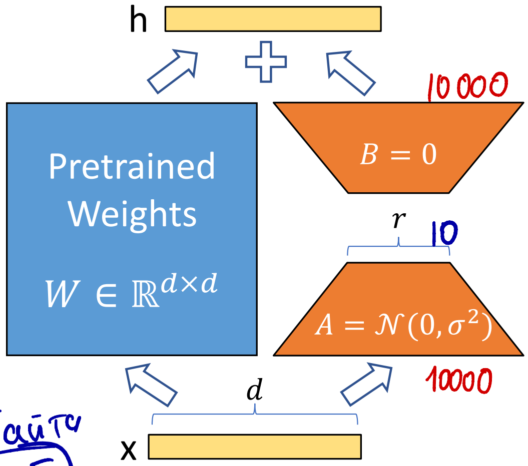
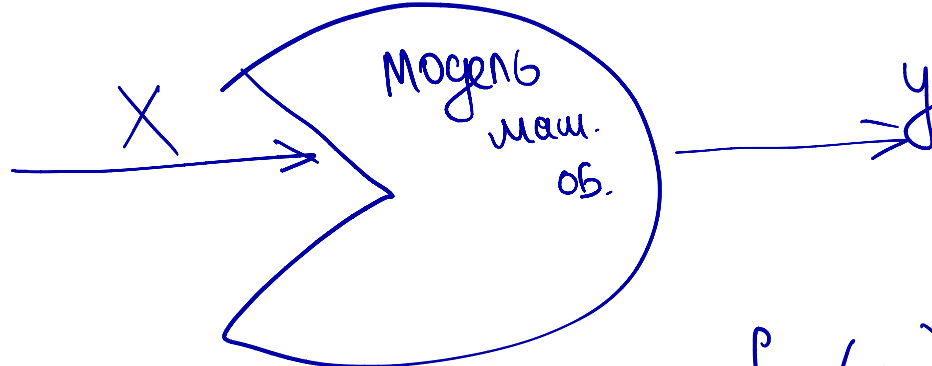


Рис. 2: Иллюстрация LoRA

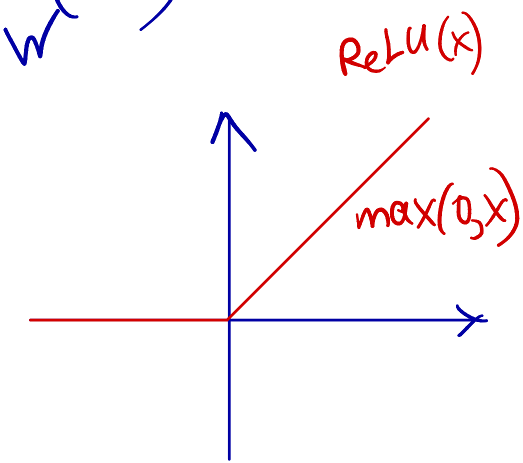


$$y = f_w(x)$$

$$f_w(x) = W \cdot x$$

$$= \mathrm{ReLU}(\underline{W} \cdot x)$$

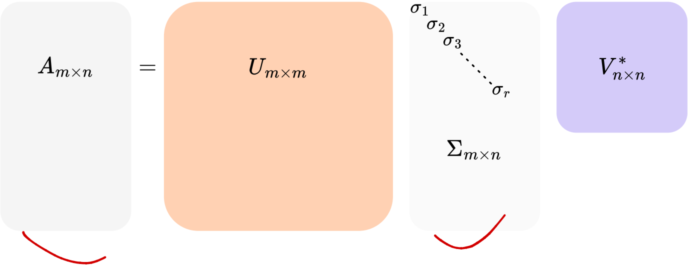
$$W = ?$$



языковая модель

без труда невытащишь рыбку из

Сингулярное разложение матрицы



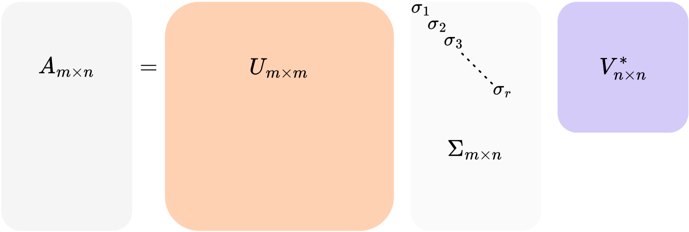
Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует разложение:

$$\boxed{A = U\Sigma V^*,}$$

где

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - унитарная матрица левых сингулярных векторов

Сингулярное разложение матрицы



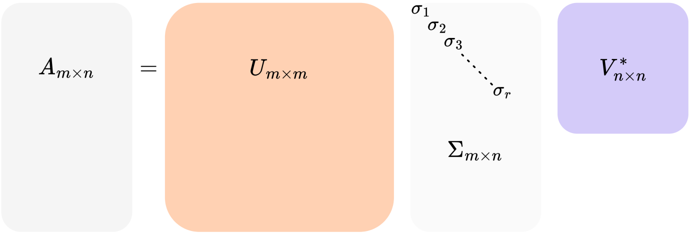
Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует разложение:

$$A = U\Sigma V^*,$$

где

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - унитарная матрица левых сингулярных векторов
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - диагональная матрица сингулярных чисел $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$

Сингулярное разложение матрицы



Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует разложение:

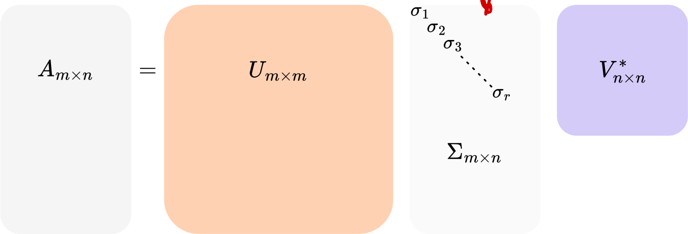
$$A = U\Sigma V^*,$$

где

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - унитарная матрица левых сингулярных векторов
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - диагональная матрица сингулярных чисел $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - унитарная матрица правых сингулярных векторов

Сингулярное разложение матрицы

единственные



$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T =$$

$$= (\Sigma V^T)^T \cdot U^T =$$

$$= V\Sigma^T \cdot U^T = V\Sigma U^T$$

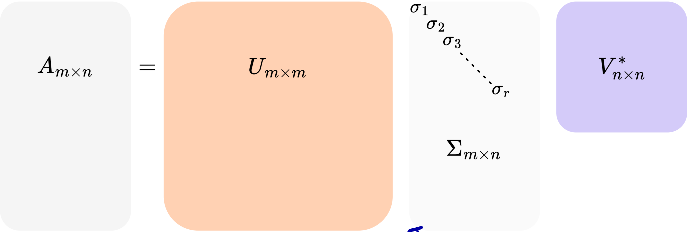
Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует разложение:

$$\boxed{A = U\Sigma V^*,}$$

где

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - унитарная матрица левых сингулярных векторов
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - диагональная матрица сингулярных чисел $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - унитарная матрица правых сингулярных векторов
- Сингулярные числа единственны. Если все сингулярные числа различны, то разложение единственно с точностью до унитарной диагональной матрицы D: $U\Sigma V^* = UD\Sigma(VD)^* = U\Sigma V^*$.

Сингулярное разложение матрицы



Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует разложение:

$$A = U\Sigma V^*,$$

где

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - унитарная матрица левых сингулярных векторов
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - диагональная матрица сингулярных чисел $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - унитарная матрица правых сингулярных векторов
- Сингулярные числа единственны. Если все сингулярные числа различны, то разложение единственно с точностью до унитарной диагональной матрицы D: $U\Sigma V^* = UD\Sigma(VD)^* = U\Sigma V^*$.

$A = U\Sigma V^T \qquad A^T = V\Sigma U^T$

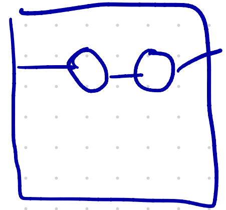
$\underline{AA^T} = U\Sigma V^T \cdot V\Sigma U^T = \underline{U\Sigma^2 U^T}$

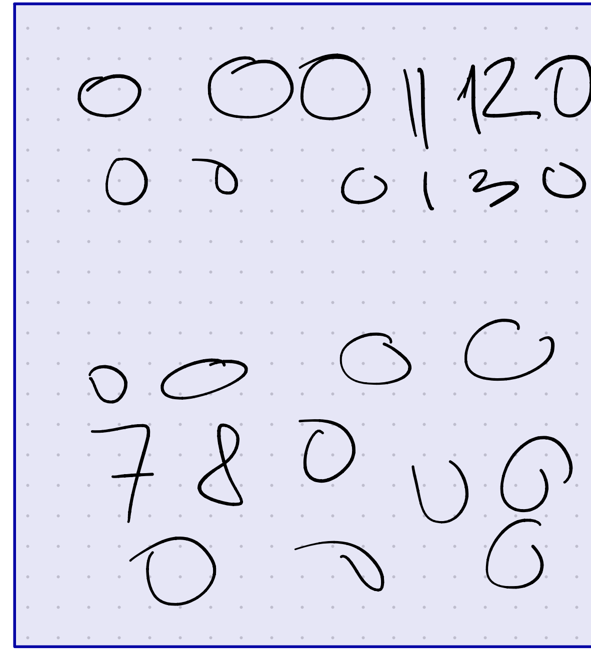
$\underline{A^TA} = V\Sigma U^T \cdot U\Sigma V^T = \underline{V\Sigma^2 V^T}$

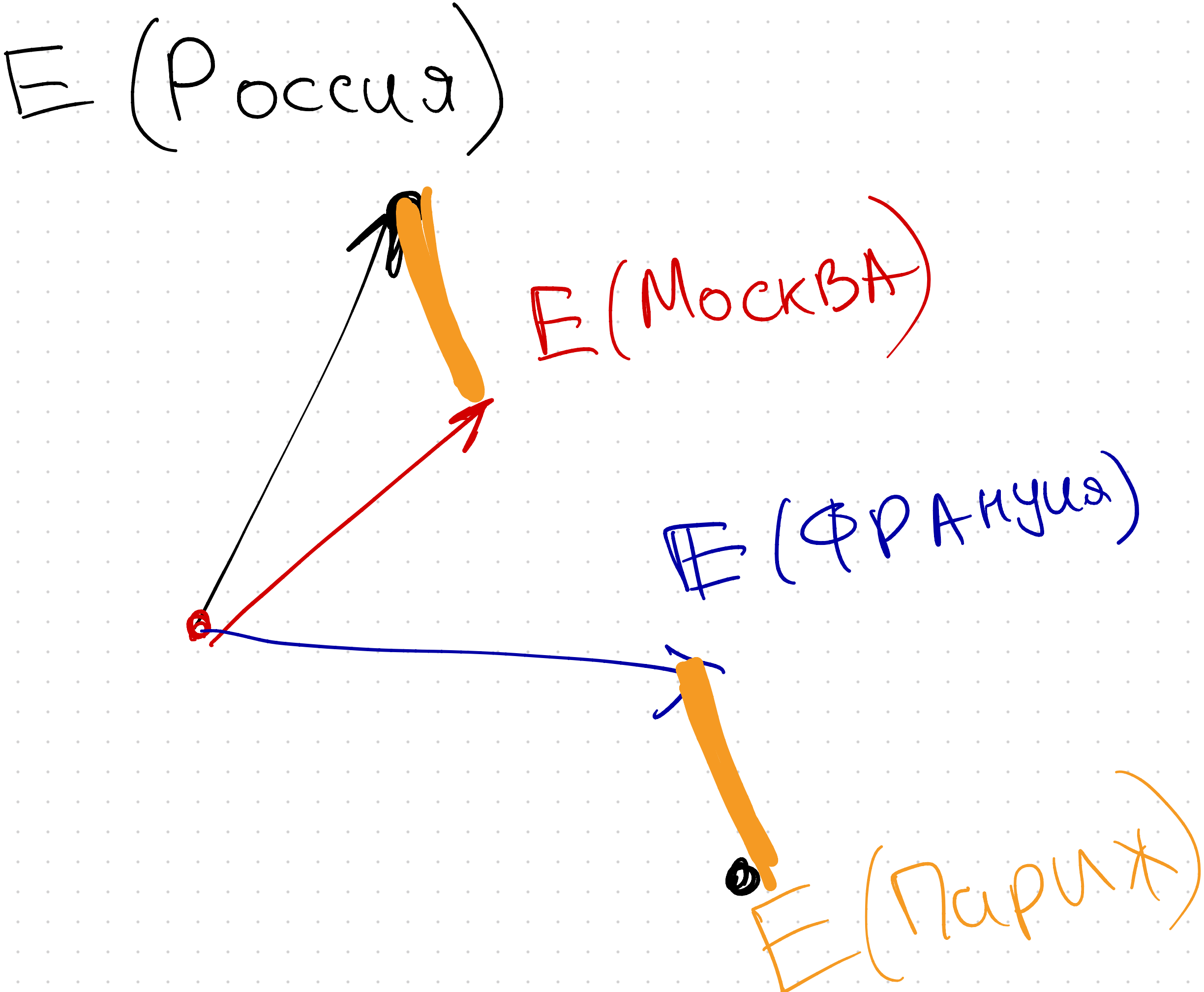
спектральное разлож.

$A = Q\Lambda Q^T$


знания
это
сила






E(Россия)
E(Москва)
E(Франция)
E(Париж)