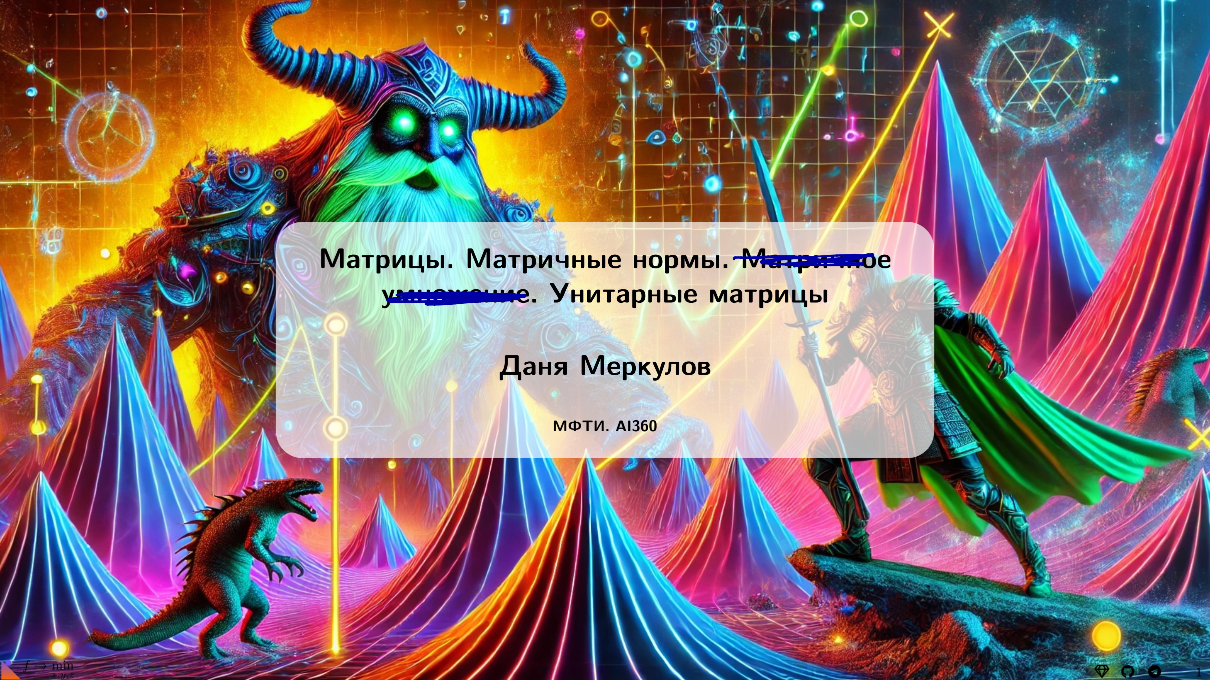


Матрицы. Матричные нормы. ~~Матричное умножение~~. Унитарные матрицы

Даня Меркулов

МФТИ. AI360

Базовые понятия линейной алгебры

Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины n обозначается $\mathbb{R}^n$, а пространство вещественных $m \times n$ матриц обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$. [1]

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

[1] Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге Introduction to Applied Linear Algebra -- Vectors, Matrices, and Least Squares - книга Стивена Бойда и Ливена Ванденбергена, которая указана в источнике. Также полезной книгой по линейной алгебре является приложение A в книге Numerical Optimization Джорджа Носедаля и Стивена Райта.

Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины n обозначается $\mathbb{R}^n$, а пространство вещественных $m \times n$ матриц обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$. [1]

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Аналогично, если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ мы обозначаем транспонирование как $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Мы будем писать $x \geq 0$ и $x \neq 0$ для обозначения покомпонентного неравенства.

[1] Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге Introduction to Applied Linear Algebra -- Vectors, Matrices, and Least Squares - книга Стивена Бойда и Ливена Ванденбергена, которая указана в источнике. Также полезной книгой по линейной алгебре является приложение A в книге Numerical Optimization Джорджа Носедаля и Стивена Райта.

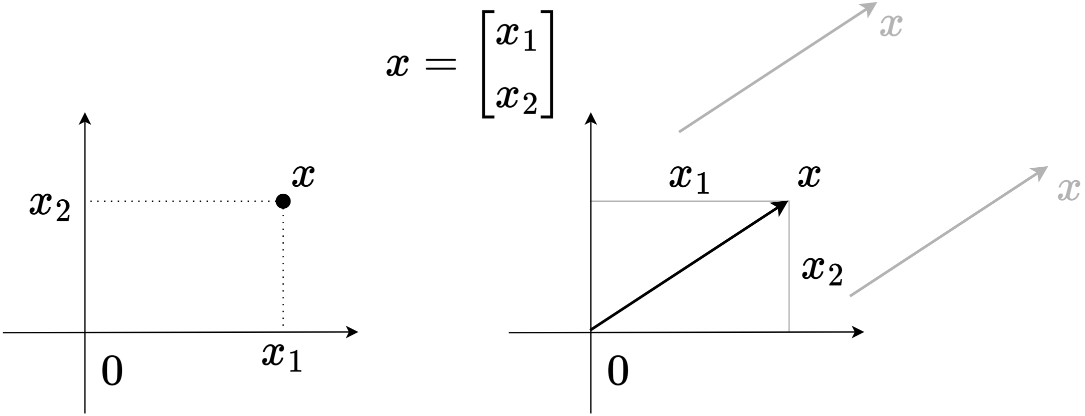


Рис. 1: Эквивалентные представления вектора

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T A x > (<) 0$. Обозначается как $A \succ (\prec) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++} (\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T A x > (<) 0$. Обозначается как $A \succ (\prec) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++} (\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T A x \geq (\leq) 0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+} (\mathbb{S}^n_{-})$.

Question

полу

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

контрпример

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 > 0$$

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^TAx > (<)0$. Обозначается как $A \succ (\prec)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++}(\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^TAx \geq (\leq)0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+}(\mathbb{S}^n_{-})$.

Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

Question

Верно ли, что если матрица симметрична, то она положительно определена?

контрпример

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1^2 - x_2^2 < 0$$

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T A x > (<) 0$. Обозначается как $A \succ (\prec) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++} (\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T A x \geq (\leq) 0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+} (\mathbb{S}^n_{-})$.

> **Question**
>
> Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

> **Question**
>
> Верно ли, что если матрица симметрична, то она положительно определена?

$x \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}_{2\times1} \quad x^+ \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \end{pmatrix}_{1\times2}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1^* x_2 - x_2^* x_1$

$\forall x \in R^n : x^T A x \geq 0$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

> **Question**
>
> Верно ли, что если матрица положительно определена, то она симметрична?

Умножение матриц

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и B - матрица размера $n \times p$, и пусть произведение AB задается как:

$$C = AB$$

тогда C - матрица размера $m \times p$, с элементом (i, j) задаваемым как:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^3)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

$A = A^T$ – симметричная

$A = A^*$ – эрмитова

Умножение матриц

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и B - матрица размера $n \times p$, и пусть произведение AB задается как:

$$C = AB$$

тогда C - матрица размера $m \times p$, с элементом (i, j) задаваемым как:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^3)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Question

Можно ли умножить две матрицы быстрее, чем за $\mathcal{O}(n^3)$? Как насчет $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n)$?

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (но если A и B - коммутирующие матрицы, то есть $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$)

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (но если A и B - коммутирующие матрицы, то есть $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$)
- $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Расстояние между двумя векторами определяется как:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Наиболее широко используемой нормой является **евклидова норма**:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

которая соответствует расстоянию в нашей повседневной жизни. Если векторы имеют комплексные элементы, мы используем их модуль. Евклидова норма, или 2-норма, является подклассом важного класса p-норм:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

L_1 норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

L_1 норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

L_1 норма играет очень важную роль: она связана с методами **compressed sensing**, которые стали одной из популярных тем исследований в середине 00-х. Код для изображения ниже доступен *здесь:*. Также можно посмотреть *этот* видео.

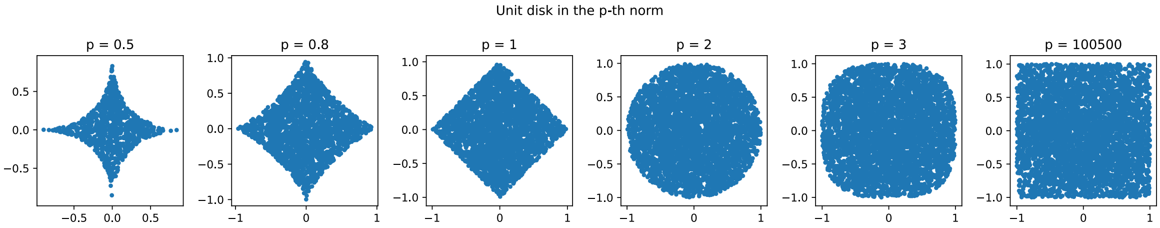


Рис. 2: Шары в разных нормах на плоскости

Матричные нормы

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

- Дополнительно, некоторые нормы могут удовлетворять **свойству субмультипликативности**:

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\|\|B\|}$$

  Эти нормы называются **субмультипликативными нормами**.

Матричные нормы

$$\|A\|_c = 1 \qquad \|B\|_c = 1$$

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

- Дополнительно, некоторые нормы могут удовлетворять **свойству субмультипликативности**:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

  Эти нормы называются **субмультипликативными нормами**.

- Пример несубмультипликативной нормы - норма Чебышёва:

$$\boxed{\|A\|_C = \max_{i,j} |a_{ij}|}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\|AB\|_c = 2$$

Пример

Придумайте контрпример

Покажите, что норма Чебышёва не является субмультипликативной.

Пример

Придумайте контрпример

Покажите, что норма Чебышёва не является субмультипликативной.

Рассмотрим матрицы

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для каждой из них

$$\|A\|_C = \|B\|_C = 1.$$

Вычислим произведение:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Если норма была бы субмультипликативной, то должно выполняться

$$2 = \|AB\|_C \leq \|A\|_C \cdot \|B\|_C = 1 \cdot 1 = 1,$$

но $2 > 1$.

Нормы матриц

В некотором смысле нет большой разницы между матрицами и векторами (можно векторизовать матрицу), таким образом вводится простейшая норма матрицы **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Нормы матриц

В некотором смысле нет большой разницы между матрицами и векторами (можно векторизовать матрицу), таким образом вводится простейшая норма матрицы **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Спектральная норма, $\|A\|_2$ является одной из наиболее широко используемых норм матриц (вместе с нормой Фробениуса).

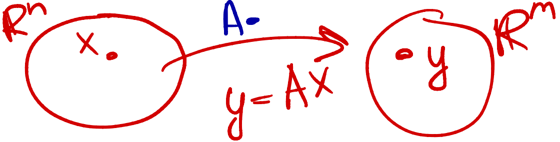
$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

Её нельзя вычислить непосредственно из элементов, используя простую формулу, как норму Фробениуса, однако существуют эффективные алгоритмы для ее вычисления. Она непосредственно связана с **сингулярным разложением** (SVD) матрицы. Она удовлетворяет следующему свойству:

$$\boxed{\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}}$$

где $\sigma_1(A)$ является наибольшим сингулярным значением матрицы A.

Операторные нормы



- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$
\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},
$$

где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

$$
\boxed{\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}}
$$

спектральная норма

$\|A\|_{1\to 2}$

$\|A\|_{1\to\infty}$

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.

Докажем, что $\|A\|_p = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ – субмультипликативна

$\forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}: \quad \|AB\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_p$

Операторные нормы

Докажем, что $\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}: \|AB\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_p$

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha \to \beta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

$$\|A\|_p = \sup \frac{\|A \cdot t\|_p}{\|t\|_p}$$

где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.

$$\|AB\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_p}{\|x\|_p} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\|ABx\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|Bx\|_p \leq$$

$$\|Bx\|_p \leq \|B\|_p \cdot \|x\|_p$$

$$\|A\underbrace{Bx}_{t}\|_p$$

$$\|A\|_p = \sup_{t\neq 0} \frac{\|At\|_p}{\|t\|_p}$$

$\forall t\neq 0$: $$\frac{\|At\|_p}{\|t\|_p} \leq \|A\|_p$$

$$\|At\|_p \leq \|A\|_p\|t\|_p$$

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

  где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.
- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.
- **Норма Фробениуса** является матричной нормой, но не является операторной нормой, т.е. нельзя найти $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ такие, чтобы они её порождали.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha \to \beta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.
- **Норма Фробениуса** является матричной нормой, но не является операторной нормой, т.е. нельзя найти $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ такие, чтобы они её порождали.
- Это нетривиальный факт и общий критерий матричной нормы для того, чтобы быть операторной нормой можно найти в Теореме 6 и следствии 4.

Пример

Question

Покажите, что операторная норма $\| \cdot \|_{\alpha \to \alpha}$ является субмультипликативной.

Пример

ℹ Question

Покажите, что операторная норма $\|\cdot\|_{\alpha\to\alpha}$ является субмультипликативной.

Определим операторную норму для матрицы A как

$$\|A\|_{\alpha\to\alpha} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}.$$

Для двух матриц A и B рассмотрим для любого $x \neq 0$:

$$\|ABx\|_\alpha \leq \|A\|_{\alpha\to\alpha}\|Bx\|_\alpha \leq \|A\|_{\alpha\to\alpha}\|B\|_{\alpha\to\alpha}\|x\|_\alpha.$$

Делим на $\|x\|_\alpha$ и берем супремум по $x \neq 0$:

$$\|AB\|_{\alpha\to\alpha} \leq \|A\|_{\alpha\to\alpha}\|B\|_{\alpha\to\alpha}.$$

Таким образом, операторная норма с одинаковыми векторными нормами является субмультипликативной.

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм - это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|.$

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм - это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|.$
- $p = 2,$ спектральная норма, обозначаемая как $\|A\|_2$.

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм - это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|.$
- $p = 2, \quad$ спектральная норма, обозначаемая как $\|A\|_2$.
- $p = \infty, \quad \|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^m |a_{ij}|.$

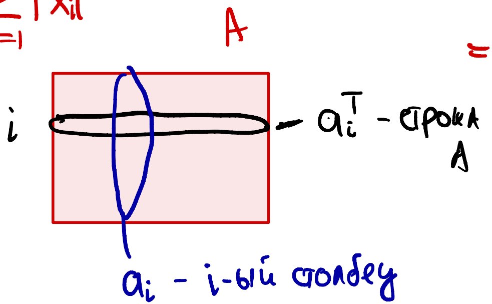
Пример

Покажите, что $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

опр $\|A\|_1 = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} =$

$\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$

$= \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^n |a_i^T x|}{\|x\|_1}$, где a_i^T → i-ая строка A



Пример

Покажите, что $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Пример

Покажите, что $\boxed{\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.}$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\|_1 = 6$$

$4 \quad 6$

Решениеможно разбить на две части: показать, что норма не превосходит максимальной суммы модулей столбца, и построить вектор, для которого достигается это значение. Норма $\|A\|_1$ определяется как операторная норма, индуцированная векторной 1-нормой:

$$\|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}. = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1$$

При этом можно показать, что

$a_i^T x$

$$\|Ax\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \left[\sum_{j=1}^n \overbrace{|x_j|}^{\|x\|_1} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \right]. =$$

Если выбрать x так, чтобы вся масса $\|x\|_1 = 1$ приходилась на столбец с максимальной суммой модулей, получим, что супремум равен

$$\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

$$= \sum_{j=1}^n |x|_j \cdot K_j = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 3$$

$$K_j = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 1$$

TAN 1??

x_j - MAX

Пример

Покажите, что $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \sup \max_i |a_i^T x| =$$

$$= \sup \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

Пример

Покажите, что $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$.

Аналогично, операторная норма, индуцированная ∞-нормой, определяется как

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

При этом легко доказать, что

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \, \|x\|_\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|.$$

Скалярное произведение

Стандартное **скалярное (внутреннее) произведение** между векторами x и y из $\mathbb{R}^n$ определяется как:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = y^T x = \langle y, x \rangle$$

Здесь x_i и y_i являются i-ми компонентами соответствующих векторов.

Example

Докажите, что можно перемещать матрицу внутри скалярного произведения с транспонированием: $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$ и $\langle x, yB \rangle = \langle xB^T, y \rangle$

Скалярное произведение матриц

Стандартное **скалярное (внутреннее) произведение** между матрицами X и Y из $\mathbb{R}^{m \times n}$ определяется как:

$$\boxed{\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(Y^T X) = \langle Y, X \rangle}$$

Question

Существует ли связь между нормой Фробениуса $\| \cdot \|_F$ и скалярным произведением между матрицами $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

$$\langle X, X \rangle = \|X\|_F^2$$

Пример

ℹ Question

Посчитайте скалярное произведение матриц

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A^T B)$$

$$\boxed{= \sum_{ij} a_{ij} \cdot b_{ij} = 1 + 5 = 6}$$

Пример

Question

Упростите следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1} a_i, a_i \rangle,$$

где $S = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T, a_i \in \mathbb{R}^n, \det(S) \neq 0$

Ортогональные матрицы

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\boxed{\|Uz\|_2 = \|z\|_2}$ для всех z.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\boxed{\|Uz\|_2 = \|z\|_2}$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$\boxed{U^T U = I_n,}$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

  где I_n - единичная матрица $n \times n$.
- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$\boxed{U^T U = U U^T = I_n,}$$

  что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = UU^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = UU^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
  - $U^T U = I_n$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
  - $U^T U = I_n$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$
  - $U U^T = I_m$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными строками** для $m < n$

Ортогональные матрицы

$U: \quad U^T U = U U^T = I$

$V: \quad V^T V = V V^T = I$

$U \cdot V$

Важное свойство: **произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей:**

$$
(UV)^T UV = V^T \overbrace{U^T U}^{I} V = \underbrace{V^T V}_{I} = I,
$$

- Позже мы покажем, что существуют типы матриц (**отражения Хаусхолдера** и **вращения Гивенса**) композиция которых способна произвести любую унитарную матрицу

Ортогональные матрицы

Важное свойство: **произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей:**

$$(UV)^T UV = V^T U^T UV = V^T V = I,$$

- Позже мы покажем, что существуют типы матриц (**отражения Хаусхолдера** и **вращения Гивенса**) композиция которых способна произвести любую унитарную матрицу
- Эта идея является основой некоторых алгоритмов, например, QR-разложения

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\boxed{\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.}$$

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

- Для $\|\cdot\|_2$ это следует из определения операторной нормы и того факта, что векторная 2-норма является ортогонально инвариантной.

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

- Для $\|\cdot\|_2$ это следует из определения операторной нормы и того факта, что векторная 2-норма является ортогонально инвариантной.
- Для $\|\cdot\|_F$ это следует из $\|A\|_F^2 = \mathrm{trace}(A^TA)$ и того факта, что $\mathrm{trace}(BC) = \mathrm{trace}(CB)$.

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки
- Матрица отражения Хаусхолдера

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки
- Матрица отражения Хаусхолдера
- Матрица вращения Гивенса

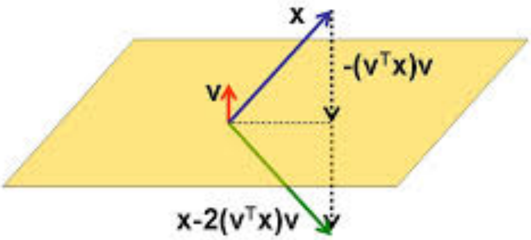
Матрица отражения Хаусхолдера

Матрица отражения Хаусхолдера - это ортогональная матрица, которая используется для отражения вектора относительно гиперплоскости. Она имеет следующий вид:

$$H \equiv H(v) = I - 2vv^T,$$

где v - вектор длины n и $v^T v = 1$.

- Покажите, что H - ортогональная матрица и $H^T = H$.



Матрица отражения Хаусхолдера

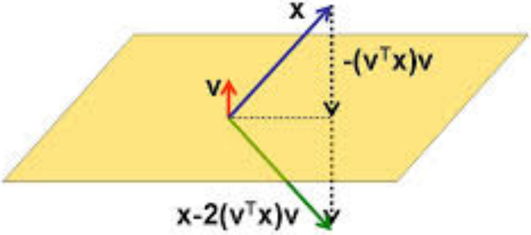
Матрица отражения Хаусхолдера - это ортогональная матрица, которая используется для отражения вектора относительно гиперплоскости. Она имеет следующий вид:

$$
H \equiv H(v) = I - 2vv^T,
$$

где v - вектор длины n и $v^T v = 1$.

- Покажите, что H - ортогональная матрица и $H^T = H$.
- Покажите, что H - отражение:

$$
Hx = x - 2(v^T x)v
$$



Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

  $$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

  где α - неизвестная константа.

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

  где α - неизвестная константа.
- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

  и $\alpha = \pm\|x\|_2$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

  где α - неизвестная константа.
- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

  и $\alpha = \pm\|x\|_2$
- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$
H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$
Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,
$$

  где α - неизвестная константа.
- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$
\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.
$$

  и $\alpha = \pm\|x\|_2$
- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$
v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}
$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$
x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;
$$

  или

$$
\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.
$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

  где α - неизвестная константа.
- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

  и $\alpha = \pm\|x\|_2$
- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;$$

  или

$$\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.$$

- Следовательно,

$$(v^T x)^2 = \frac{\|x\|_2^2 - \alpha x_1}{2}.$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$
H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$
Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,
$$

где α - неизвестная константа.

- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$
\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.
$$

и $\alpha = \pm \|x\|_2$

- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$
v = \frac{x - \alpha e_1}{2 v^T x}
$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$
x^T x - 2(v^T x) x^T v = \alpha x_1;
$$

или

$$
\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.
$$

- Следовательно,

$$
(v^T x)^2 = \frac{\|x\|_2^2 - \alpha x_1}{2}.
$$

- Таким образом, v существует и равно

$$
v = \frac{x \mp \|x\|_2 e_1}{2 v^T x} = \frac{x \mp \|x\|_2 e_1}{\pm \sqrt{2(\|x\|_2^2 \mp \|x\|_2 x_1)}}.
$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$
H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$
H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$
\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$
H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$
\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

- Получаем

$$
H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}
$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$
H_2H_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$
\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

- Получаем

$$
H_3H_2H_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}
$$

- Аналогично находим H_4 и получаем верхнюю треугольную матрицу.

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$
H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}
$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$
\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

- Получаем

$$
H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}
$$

- Аналогично находим H_4 и получаем верхнюю треугольную матрицу.
- Так как произведение ортогональных и обратная к ортогональной матрицы являются ортогональными матрицами, мы получаем **следствие:** (QR-разложение) Любая $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ может быть представлена как

$$
A = QR,
$$

где Q - ортогональная и R - верхняя треугольная. См. постер, каковы размеры Q и R для $n > m$ и $n < m$.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Легко проверить, что $G^TG = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

  Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$x' = Gx,$$

  где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$x'_i = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x'_j = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,$$

  при этом остальные x_k остаются неизменными.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

  Легко проверить, что $G^TG = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$x' = Gx,$$

  где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$x_i' = x_i\cos\alpha - x_j\sin\alpha, \quad x_j' = x_i\sin\alpha + x_j\cos\alpha,$$

  при этом остальные x_k остаются неизменными.

- Чтобы обнулить j-ю координату вектора, выбираем угол α так, что:

$$\cos\alpha = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:
$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.
- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:
$$x' = Gx,$$
где изменяются только i-я и j-я координаты:
$$x'_i = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x'_j = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,$$
при этом остальные x_k остаются неизменными.
- Чтобы обнулить j-ю координату вектора, выбираем угол α так, что:
$$\cos\alpha = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$
- Применяя последовательно матрицы Гивенса, можно привести матрицу к верхнетреугольному виду: для этого нужно $n-1$ вращений, чтобы обнулить элементы под главной диагональю в каждом столбце.

QR через вращения Гивенса

Также мы можем сделать матрицу верхнетреугольной с помощью вращений Гивенса:

$$
\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ * & \times & \times \\ * & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & \times & \times \\ * & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & * & \times \\ 0 & * & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}
$$

Вращения Гивенса vs. отражения Хаусхолдера

- Отражения Хаусхолдера полезны для плотных матриц (сложность приблизительно в два раза меньше, чем для Якоби) и мы должны обнулить большое количество элементов.

Вращения Гивенса vs. отражения Хаусхолдера

- Отражения Хаусхолдера полезны для плотных матриц (сложность приблизительно в два раза меньше, чем для Якоби) и мы должны обнулить большое количество элементов.
- Вращения Гивенса более подходят для разреженных матриц или параллельных вычислений, так как они действуют локально на элементах.